

QC
A613
5. FOLGE, 1931, BAND 11, HEFT 2

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 403. Band

Kuratorium:

F. Paschen M. Planck R. Pohl
A. Sommerfeld M. Wien

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1931 erscheinen die Bände 8, 9, 10 u. 11 mit je 8 Hefen. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 28.— zuzüglich Rm. 1.60 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 2.— für das Ausland. Redaktionsschluß am 11. September 1931.

I n h a l t

	Seite
M. J. O. Strutt-Eindhoven (Holland), Über die Schallstrahlung einer mit Knotenlinien schwingenden Kreismembran. (Mit 2 Figuren)	129
F. Noether-Breslau, Über die Verteilung des Energiestroms bei der Totalreflexion. (Mit 1 Figur)	141
W. L. Barrow-Cambridge (Mass., USA.), Untersuchungen über den Heulsummer. (Mit 41 Figuren)	147
Wilhelm Müller-Frankfurt a. M., Fresnelsche Beugungserscheinungen; Interferenzen hoher Ordnungszahl. (Mit 10 Figuren)	177
Max Trautz-Heidelberg, Die Reibung, Wärmeleitung und Diffusion in Gasmischungen. XIX. Temperaturkoeffizient, Zahlwert und Vorausberechnung der Gasreibung aus chemischer Formel und kritischer Temperatur	190
Georg v. Békésy-Budapest, Über die Messung der Schwingungsamplitude fester Körper. (Mit 3 Figuren)	227
Eugen Kappler-München, Versuche zur Messung der Avogadro-Loschmidtschen Zahl aus der Brownschen Bewegung einer Drehwaage. (Mit 11 Figuren)	233

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn **Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grunleisen, Marburg/L., Malnzer Gasse 33**, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

AM

5. F

mit

d

I
Auffa
Praxi
knot
ratori
Frequ
sprech

I
knot
ist es

I
in ein
zwei

I
bei ei
berech
Punkt
beiden
erhält
den M
Komp
rein
Komp
strahl

Ann

Über die Schallstrahlung einer mit Knotenlinien schwingenden Kreismembran

Von M. J. O. Strutt

Aus dem „Natuurkundig Laboratorium
der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken“ Eindhoven (Holland)

(Mit 2 Figuren)

Im Gegensatz zur früher in der Literatur vertretenen Auffassung, eine Lautsprechermembran (bzw. -kegel) sei in der Praxis bis zu hohen Schwingungszahlen hinauf (z. B. 5000 Hertz) knotenfrei, haben Amplitudenmessungen im hiesigen Laboratorium ⁽¹⁰⁾ ergeben, daß schon bei verhältnismäßig niedrigen Frequenzen (z. B. 500 Hertz) viele der verwendeten Lautsprecherkegel sowohl Kreis- wie Radialknotenlinien aufwiesen.

Die Theorie rechnet bis jetzt mit der Schallstrahlung knotenfreier Strahlungsflächen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese Theorie auf Flächen mit Knotenlinien zu erweitern.

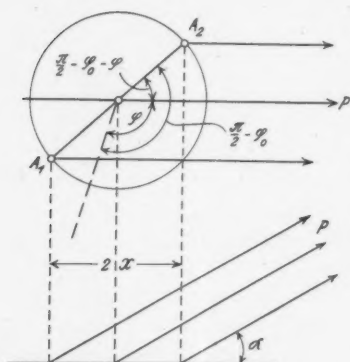
I. Grundlagen der Rechnung

Bei der Berechnung der Schallstrahlung einer Membran in einer unendlich großen starren, ebenen Wand kann man zwei wesentlich verschiedene Wege einschlagen.

Der erste Weg wurde ursprünglich von Lord Rayleigh ¹⁾ bei einer starren, kreisförmigen Kolbenmembran benutzt. Man berechnet hierbei Druck und Geschwindigkeit der Luft in jedem Punkt der Membranoberfläche. Indem dann das Produkt dieser beiden Größen über die Membranoberfläche integriert wird, erhält man die gesamte Reaktion der bewegenden Luft auf den Membranantriebspunkt. Diese Gesamtreaktion hat eine Komponente, die gleichphasig mit der Geschwindigkeit des rein sinusförmig bewegenden Antriebspunktes ist. Diese Komponente der Reaktionskraft ist proportional zur Schallstrahlung. Die Phase der zweiten Komponente unterscheidet

sich um eine Viertelperiode von derjenigen der Antriebspunkts-
geschwindigkeit. Diese Komponente ist proportional zur Masse
der mitschwingenden Luft.

Der zweite Weg besteht darin, daß man Druck und Ge-
schwindigkeit der Luft in sehr großem Abstände von der Mem-
bran berechnet. Das Produkt beider Größen wird darauf über
einer großen Halbkugelfläche integriert. Man erhält so eine
Größe, welche proportional ist zur Gesamtschallstrahlung der



Winkelbezeichnungen zum Text;
oben Grundriß, unten Aufriß

Fig. 1

Unter ψ verstehen wir den in der Ebene A_2OP ge-
messenen Winkel zwischen OP und OA_2 . Die rechtwinklige
sphärische Trigonometrie ergibt für $\cos \psi$ den Ausdruck:

$$\cos \psi = \cos \alpha \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varphi \right) = \cos \alpha \cdot \sin (\varphi + \varphi_0).$$

Nennt man R die Entfernung OP , die sehr groß gegen-
über der Wellenlänge des Schalles in der Luft und gegen
den Membranradius sein soll, so ist die Entfernung

$$A_2P = R - x \cos \psi \quad \text{und} \quad A_1P = R + x \cos \psi.$$

(x = Entfernung A_1O ; in der Fig. 1 ist x falsch bezeichnet).

Membran. Die mitschwin-
gende Luftmasse dagegen
läßt sich bei dieser zweiten
Methode nicht sofort er-
halten.

Es zeigt sich, daß der
zweitgenannte Weg auch bei
Membranen mit Knoten-
linien zum Ziel führt. Wir
werden daher diesen Weg
im vorliegenden Aufsatz
verwenden.

Die Membranmitte ma-
chen wir zum Nullpunkt 0
eines Polarkoordinaten-
systems (Fig. 1). Der Null-
meridian $\varphi = 0$ ist will-
kürlich gewählt worden.

Die Schallamplitude in P , welche von der Bewegung des Membranpunktes A_2 herrührt, ist proportional zu

$$\frac{1}{R} \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (R - x \cos \psi)}$$

($i = \sqrt{-1}$; λ = Wellenlänge des Schalles in Luft);

jene Schallamplitude im Punkte P , die von der Bewegung des Membranpunktes A_2 herrührt, ist proportional zu

$$\frac{1}{R} \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (R + x \cos \psi)}.$$

Hierbei ist angenommen worden, daß alle Membranpunkte als Funktion der Zeit t sinusförmig und proportional zu $e^{i\omega t}$ bewegen (ω = Kreisfrequenz).

Wir nehmen nun erstens an, die sich diametral gegenüberliegenden Membranpunkte A_1 und A_2 haben gleiche Amplitude und gleiche Phase. Dann ist offenbar die Schallamplitude in P , welche von der Zusammenwirkung dieser beiden Membranpunkte herrührt, proportional zu

$$(1) \quad \frac{1}{R} \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} R} \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \cos \psi\right).$$

Zweitens nehmen wir an, die zwei Membranpunkte A_1 und A_2 haben gleiche Amplitude und entgegengesetzte Phase (Phasendifferenz eine halbe Periode). Dann ist die Schallamplitude in P , welche von den Punkten A_1 und A_2 herrührt proportional zu:

$$(2) \quad \frac{1}{R} \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \cos \psi\right).$$

Für den nächsten Abschnitt brauchen wir die folgenden Reihen:

$$(1a) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \cos \psi\right) &= I_0\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \cos \alpha\right) \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \cos \alpha\right) \cdot \cos 2n(\varphi + \varphi_0), \end{aligned} \right.$$

$$(2a) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \cos \psi\right) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \cos \alpha\right) \\ &\cdot \sin(2n+1)(\varphi + \varphi_0) \end{aligned} \right.$$

Hierbei bedeutet in der üblichen Weise $I_n(y)$ die Besselsche Funktion 1. Art n -ter Ordnung mit dem Argument y .

Wir werden jetzt mit Hilfe der Formeln (1) und (2) die gesamte Schallstrahlung von Kreismembranen mit Knotenlinien berechnen.

II. Berechnung der Schallamplitude in einem weit entfernten Punkte P

Wir müssen einige Annahmen über die Schwingungsform der Membran machen. Wenn sie genau zentrisch angetrieben wird, werden nur kreisförmige Knotenlinien auftreten. In der Praxis beobachtet man bei Lautsprechermembranen fast immer auch radiale Knotenlinien. Die Ursache hierfür liegt in einer Abweichung von der genauen zentrischen Symmetrie, sei es beim Antrieb oder bei der Membran selber. Um diesen praktisch auftretenden Verhältnissen möglichst Rechnung zu tragen, werden wir sowohl Kreis- wie Radialknotenlinien annehmen. Wir können die Schwingungsform der Membran stets in eine Besselfourierreihe entwickeln:

$$(3) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \cdot \cos n \varphi_0 \cdot I_n(K_m x)$$

wobei K_m die m -te Wurzel der Gleichung:

$$I_n(Ka) = 0$$

darstellt, mit a der äußere Membranbegrenzungsradius, sofern wir annehmen, dieser Radius sei *festgehalten*. Hieraus folgt, daß es genügt, wenn wir die Schallstrahlung einer Membran berechnen, die nach der Formel

$$(4) \quad \cos n \varphi_0 \cdot I_n(K_m x)$$

schwingt. Die Schallstrahlung einer beliebig schwingenden Kreismembran wird dann durch Superposition der Schallstrahlungen, welche von den Partialschwingungskomponenten herrühren, jede mit richtiger Amplitude B_{mn} gemäß (3), erhalten.

Die Aufgabe, die Schallstrahlung einer nach (4) schwingenden Membranfläche zu berechnen, kann eingeteilt werden in Fälle mit geradem n (gerade Anzahl diametraler Knotenlinien) und in Fälle mit ungeradem n (ungerade Anzahl Diametral-

knoten). Wir werden jetzt zeigen, daß diesen beiden Fällen bzw. die Formeln (1) und (2) entsprechen.

Wenn eine Membran mit einer geraden Anzahl von Knotendurchmessern gemäß (4) schwingt, haben zwei sich diametral gegenüberliegende Membranpunkte gleiche Amplitude und gleiche Phase. Wir können also für zwei solche Punkte die Formel (1) anwenden. Ist dagegen eine ungerade Anzahl von Knotendurchmessern vorhanden, so haben zwei Diametralpunkte der Membran gleiche Amplitude und entgegengesetzte Phase. Folglich gilt in diesem Fall die Formel (2). In jedem der zwei Fälle haben wir über φ von 0 bis π und über x von 0 bis a zu integrieren. Hierdurch erhält man bei einer geraden Anzahl von Knotendurchmessern:

$$\frac{e^{-\frac{2\pi}{\lambda} i R}}{R} \int_0^a x \cdot dx \cdot \int_0^\pi d\varphi_0 \cdot \{\cos n\varphi_0 \cdot I_n(K_m x)\} \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \cos \psi\right).$$

$$(1b) \quad |P| = \frac{\pi a^2}{R} \cdot \left| \frac{K_m a \cdot I_{n-1}(K_m a) \cdot I_n\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \cos \alpha\right)}{K_m^2 a^2 - \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \cos \alpha\right)^2} \cdot \cos n\varphi \right|.$$

Bei der Integration haben wir von der Entwicklungsformel (1a) Gebrauch gemacht und weiter noch von der Formel:

$$\int x \cdot I_n(\beta x) \cdot I_n(\gamma x) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\beta^2 - \gamma^2} \{ \gamma x \cdot I_n(\beta x) \cdot I_{n-1}(\gamma x) - \beta x I_{n-1}(\beta x) I_n(\gamma x) \}.$$

In ähnlicher Weise erhält man bei einer ungeraden Anzahl von Knotendurchmessern unter Benutzung von (2) und (2a) die Formel:

$$(2b) \quad |P| = \frac{\pi a^2}{R} \cdot \left| \frac{K_m a \cdot I_{n-1}(K_m a) \cdot I_n\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \cos \alpha\right)}{K_m^2 a^2 - \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \cos \alpha\right)^2} \cdot \sin n\varphi \right|.$$

Die Größe $|P|$ in den Formeln (1b) und (2b) stellt bis auf einen gleichgültigen Faktor die Schallamplitude im weit entfernten Punkt P dar. Wir können aus der Formel (1a) sofort

die bekannte Gleichung^{5), 2), 9)} für eine knotenfreie starre Kolbenmembran ableiten und erhalten in diesem Fall:

$$(5) \quad |P|_{\text{starr}} = \frac{\pi a^2}{R} \cdot \frac{I_1 \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \cos \alpha \right)}{\frac{2\pi a}{\lambda} \cos \alpha}.$$

Die Größe (5) ist unmittelbar mit (1b) und (2b) vergleichbar, d. h. der Faktor, mit dem $|P|$ aus (5) multipliziert werden muß, um die Schallstrahlung zu erhalten, ist der gleiche wie der entsprechende Proportionalitätsfaktor aus (1b) und (2b).

III. Diskussion der Schallstrahlung von Membranen, klein in bezug auf die Schallwellenlänge in Luft

Wie aus den Formeln (1b) und (2b) zu ersehen, hängt die Schallstrahlung einer Membran mit Knotenlinien von 3 Parametern ab:

$$K_m a; \quad \frac{2\pi a}{\lambda}; \quad n.$$

Der erste Parameter bestimmt die Anzahl der Kreisknotenlinien; der zweite das Verhältnis des Membranhalmessers zur Schallwellenlänge in Luft und der dritte die Anzahl der diametralen Knotenlinien.

Eine *vollständige* Diskussion der Schallstrahlung in Abhängigkeit von diesen drei Größen werden wir nicht durchführen. Wir werden hier nur jene Fälle herausgreifen, die mathematisch leicht übersehbar und praktisch wichtig erscheinen. Insbesondere betrachten wir im vorliegenden Abschnitt den Fall, daß der zweitgenannte obige Parameter klein ist:

$$(6) \quad \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1,$$

also praktisch etwa kleiner als $\frac{1}{4}$. Wenn man beachtet, daß einem Ton von 500 Hertz eine Wellenlänge von 66 cm entspricht, während die meistens verwendeten Lautsprecherkegel einen Radius von etwa 10 cm haben, wird klar, daß die Betrachtungen dieses Abschnittes bei solchen Lautsprechermembranen nur bis etwa 150 Hertz hinauf anwendbar sind, also für die ganz tiefen Töne.

Unter der Bedingung (6) vereinfachen sich die Formeln (1a) und (2a) zu

$$\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \cos \psi\right) = 1; \quad \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \cos \psi\right) = \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \psi.$$

Ausführung der Integrationen, die zu (1b) und (2b) führten, zeigt im vorliegenden Fall folgendes. Bei einer von Null verschiedenen Anzahl diametraler Knotenlinien ist die Schallstrahlung verschwindend gering. Sind keine Knotendurchmesser sondern nur Kreisknoten vorhanden, so ergibt das erwähnte Integral im allgemeinen einen endlichen, aber geringen Betrag für die Schallstrahlung.

Das Ergebnis der Rechnung läßt sich so ausdrücken, daß unter der Bedingung (6) die Schallstrahlung proportional zum gesamten Luftvolumen ist, das durch die Membranschwingung weggedrückt wird. Offenbar ist dieses Volumen beim Vorhandensein von Knotendurchmessern Null. Das Vorhandensein von Knotenkreisen, die dem Ausdruck (4) entsprechen, verringert das besagte Volumen sehr. Will man somit eine Membran mit ordentlicher Schallstrahlung bei den tiefen Tönen haben, so ist irgendwelche Knotenbildung zu vermeiden.

Erwähnenswert ist, daß dieser Schluß im praktischen Fall eines frei schwingenden Lautsprecherkegels, der zentrisch angetrieben wird, noch einigermaßen modifiziert werden muß. Sind bei einem solchen Kegel infolge irgendwelcher Unsymmetrien Radialknoten vorhanden, so beeinträchtigen diese die Schallstrahlung bei den tiefen Tönen, eine konstante Geschwindigkeitsamplitude des angetriebenen Kegelzentrums angenommen, *nicht*. Denn durch solche Knoten wird das gesamte beiseite gedrückte Luftvolumen nicht geändert. Anders dagegen die Knotenkreise. Diese drücken die Schallstrahlung bei den tiefen Tönen auch im Falle eines freien zentrisch angetriebenen Kegels stark herab, und sind somit möglichst zu vermeiden.

IV. Die Schallstrahlung von Membranen, vergleichbar mit der Wellenlänge des Schalles in Luft

Betrachtet man eine Membran von gegebenen Abmessungen und elastischen Eigenschaften und läßt man diese Membran gemäß (4) der Reihe nach in ihren verschiedenen Eigen-

schwingungen, der Frequenz nach geordnet, schwingen, so können für die Schallstrahlung zwei Fälle unterschieden werden, mit einer ganzen kontinuierlichen Übergangsreihe dazwischen. Erstens kann die erste Eigenschwingung der Membran bei einer so niedrigen Frequenz liegen, daß die Wellenlänge des Schalles in Luft für diese Frequenz groß gegenüber dem Membranradius ist. Zweitens kann die erste Eigenfrequenz der Membran so hoch liegen, daß die Wellenlänge des Schalles in Luft für diese Frequenz mit dem Membranradius vergleichbar ist, so daß $2\pi a/\lambda$ ungefähr gleich $K_1 a$, oder sogar größer als $K_1 a$ ist. Wir werden in diesen beiden Fällen mit Hilfe der Formeln (1b) und (2b) die Schallstrahlung allgemein diskutieren. In jedem der zwei Fälle werden wir den Einfluß von Knotendurchmessern noch eigens betrachten.

Der erstgenannte Fall unterscheidet sich von den im vorigen Abschnitt behandelten dadurch, daß dort unter allen Umständen der Membranradius klein in bezug auf die Wellenlänge war, während dies hier nur bei Frequenzen niedriger als die erste Eigenschwingungsfrequenz der Membran der Fall ist. Wir bemerken, daß die Membran bei dieser ersten Eigenschwingungsfrequenz knotenfrei schwingt. Die Ausdrücke $K_1 a$ und $2\pi a/\lambda$ aus (1b) und (2b) nehmen beide proportional mit der Frequenz zu. Wenn der erste Ausdruck, wie hier gefordert, für die niedrigste Eigenschwingungsfrequenz klein gegenüber dem zweiten ist, so trifft dies somit auch für alle höheren Eigenschwingungsfrequenzen zu. Der Nenner von (1b) und (2b) kann also im vorliegenden Fall bei keiner einzigen Frequenz klein werden. Weiter ist die Wellenlänge des Schalles in Luft auch bei vielen Membranknotenlinien groß gegen den größten Abstand zwischen zwei benachbarten Knoten. Wir können im wesentlichen die gleiche Überlegung wie im vorigen Abschnitt anwenden, mit gleichem Ergebnis, das aber jetzt für alle Frequenzen gilt: *Für eine Membran, deren niedrigste Eigenfrequenz so niedrig liegt, daß die entsprechende Schallwellenlänge in Luft groß gegen den Membranradius ist, bleibt die Schallstrahlung bei allen Frequenzen sehr gering verglichen mit einer starren Kolbenmembran.*

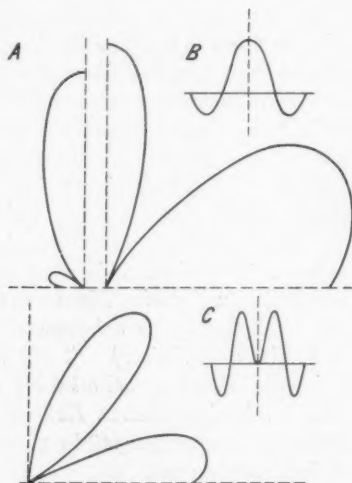
Wir kommen jetzt zum zweiten Fall. Hier werden die Ausdrücke $K_1 a$ und $2\pi a \cos \alpha/\lambda$ im Nenner von (1b) und (2b)

von gleicher Ordnung. Es wird i. a. einen bestimmten Strahlungswinkel α (Fig. 1) geben, für den diese beiden Größen sogar gleich sind. Offenbar wird die Schallstrahlung für Membranen, welche zum vorliegenden Fall gehören, beträchtlich. Der Umstand, daß diese Strahlung nach (1b) und (2b) sogar scheinbar unendlich groß werden kann, stört nicht. Denn wenn der Nenner von (1b) und (2b) für ein bestimmtes α Null wird, verschwindet gleichzeitig auch der Zähler, und zwar von gleicher Ordnung wie der Nenner. Wir haben bisher in keiner Weise die Rückwirkung der Strahlung auf die Membranschwingung in Rechnung gesetzt. Diese Rückwirkung wird verhindern, daß die Strahlung über ein gewisses Maß ansteigt. Die genaue Berechnung der maximalen Strahlung erfordert umfangreiche Betrachtungen¹⁰⁾, die außerhalb der Grenze fallen, welche wir für die vorliegende Arbeit gesteckt haben. Wir formulieren unser Ergebnis: *Für eine Membran, deren niedrigste Eigenfrequenz so hoch liegt, daß die entsprechende Schallwellenlänge vergleichbar (gleich oder kleiner) mit dem Membrandurchmesser ist, wird die Schallstrahlung bei allen höheren Frequenzen beträchtlich verglichen mit einer starren Kolbenmembran.*

Offenbar können alle Übergangsfälle zwischen den zwei behandelten praktisch vorkommen.

Wir diskutieren zum Schluß dieses Abschnittes den Einfluß von Durchmesserknöten auf die Schallstrahlung. Zunächst ist aus (1b) und (2b) bemerkenswert, daß die Schallstrahlung beim Vorhandensein solcher Knöten als Funktion des Azimuts φ auch Maxima und Minima zeigt und zwar in gleicher Anzahl wie diejenige der Durchmesserknötenlinien. Ein zweiter erwähnenswerter Einfluß der Durchmesserknöten auf die Schallstrahlung folgt aus den Eigenschaften der Besselschen Funktionen I_n im Zähler von (1b) und (2b). Eine Besselsche Funktion $I_n(y)$ ist für kleine y zunächst proportional zu y^n , also sehr klein. Und zwar wird $I_n(y)$ bei steigendem y erst bei um so größeren y -Werten beträchtlich, je größer n ist. Hieraus folgt, daß eine große Anzahl n der Durchmesserknötenlinien die Schallstrahlung bei Frequenzen, so niedrig, daß $2\pi a/\lambda$ kleiner als n ist, stark herabsetzt. Ein zweiter Einfluß der Durchmesserknöten auf die Schallstrahlung folgt auch sofort aus unsrer Betrachtung: Die Schallstrahlung

wird unter kleinen Winkeln α (Fig. 1) konzentriert, weil hierfür $2\pi a \cos \alpha / \lambda$ am größten ist. Und zwar wird dieses Zusammen-
drängen der Schallstrahlung nach kleinen Winkeln α um so
stärker, je größer n ist.



Schallstrahlungsamplitude verschiedener Membranen
als Funktion der Strahlungsrichtung

A Starre Kolbenmembran, $\frac{2\pi a}{\lambda} = 6$;

a = Membranradius, λ = Schallwellenlänge in Luft

B Membran mit einer Kreisknotenlinie (Schwingungsform der
Membran ist rechts oben skizziert)

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = 6; \quad k_1 a = 5,52$$

C Membran mit einer Kreisknotenlinie und einem Knotendurch-
messer. Bildebene gehört zum Azimut maximaler Schallstrahlung
(Schwingungsform der Membran rechts)

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = 6; \quad k_1 a = 8,42$$

In bezug auf A ist B in 10fach vergrößertem Maßstab,
C in 25fach vergrößertem Maßstab gezeichnet worden

Fig. 2

Erwähnenswert ist, daß die angeführten Betrachtungen alle auf frei schwingende, zentrisch angetriebene Lautsprecherkegel übertragen werden können, mit Ausnahme jener gerade angeführten Überlegungen, die sich auf Durchmesser-knotenlinien beziehen.

Zur Illustration der in den vorhergehenden Abschnitten durchgeführten Überlegungen geben wir einige numerische Beispiele zu den Formeln (1b) und (2b) in der Fig. 2.

V. Zusammenfassung

In diesem Aufsatz werden Ausdrücke abgeleitet für die Schallstrahlung von Kreismembranen mit Zirkular- und Radialknoten, wobei die Membran sich in einer großen starren ebenen Wand befindet. Die Diskussion dieser Formeln ergibt folgendes.

1. Für eine Membran, deren Radius klein ist in bezug auf die Schallwellenlänge in Luft, ist die Schallstrahlung beim Vorhandensein von Knotenlinien sehr gering, verglichen mit einer gleich großen starren Kolbenmembran.

2. Ist der Membrandurchmesser vergleichbar mit der Schallwellenlänge in Luft, so lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

- a) Die niedrigste Eigenfrequenz der Membran liegt so tief, daß die entsprechende Schallwellenlänge in Luft groß gegen den Membrandurchmesser ist.
- b) Die niedrigste Eigenfrequenz der Membran liegt so hoch, daß die entsprechende Schallwellenlänge in Luft kleiner als der Membrandurchmesser ist.

Im Fall 2a ist die Schallstrahlung der Membran für alle Frequenzen sehr klein im Vergleich zu derjenigen einer starren Kolbenmembran. Im Fall 2b kann dagegen die Schallstrahlung der Membran durch einen gewissen Resonanzeffekt beträchtlicher werden und zwar in diesem Fall für alle Frequenzen.

Zwischen diesen extremen Fällen 2a und 2b gibt es eine kontinuierliche Reihe von Übergängen. In einer Figur werden die Formeln an konkreten Beispielen illustriert.

Literaturverzeichnis

- 1) Zusammenfassungen mit älterer Literatur: Lord Rayleigh (the late), *Theory of Sound*, 2 Bände, Macmillan, London 1926. A. E. Kennelly, *Electrical vibration instruments*, Macmillan, New York 1923. I. B. Crandall, *Theory of vibrating systems and sound*, v. Nostrand, New York 1926.
- 2) H. Backhaus und F. Trendelenburg, *Ztschr. Techn. Phys.* 7. S. 630—635. 1926.
- 3) H. Backhaus, *Ann. d. Phys.* [5] 5. S. 1—35. 1930.
- 4) *Handbuch der Phys.*, Bd. 8, S. 296 (Springer 1929).
- 5) R. B. Lindsay, *Phys. Rev.* 32. S. 515. 1928.
- 6) N. W. Mc. Lachlan, *Proc. Royal Soc.* 122. S. 604—609. 1929.
- 7) N. W. Mc. Lachlan, *Phil. Mag.* 7. S. 1011—1038. 1929.
- 8) N. W. Mc. Lachlan, *Phil. Mag.* 7. S. 1—54. 1931.
- 9) H. Stenzel, *Ann. d. Phys.* [5] 7. S. 947—982. 1930.
- 10) M. J. O. Strutt, *Proc., Inst. Radio Eng. New York* 19. S. 839. 1931; *M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys.* [5] 10. S. 244. 1931.
- 11) A. G. Warren, *Phil. Mag.* 9. S. 881. 1930.

Eindhoven, 24. April 1931.

(Eingegangen 7. Juni 1931)

Über die Verteilung des Energiestroms bei der Totalreflexion

Von F. Noether

(Mit 1 Figur)

Im Falle der Totalreflexion verläuft bekanntlich im zweiten, dem optisch dünneren Mittel eine sogenannte *inhomogene Welle*, deren Auftreten notwendig ist, um den erforderlichen Stetigkeitsbedingungen des Feldes an der Grenzfläche genügen zu können. Die Behandlung dieses Reflexionsfalles mittels im strengen Sinne ebenen Wellen, die zur Ableitung der auch hier gültigen Fresnelschen Gleichungen ausreichend ist, liefert aber keine Erklärung dafür, woher die Energie dieser inhomogenen Welle entnommen wird, da diese Form der Berechnung den durch die Grenzfläche tretenden Energiefluß an jeder Stelle im Zeitmittel zu Null ergibt. Offenbar ist irgendwie der Rand des Wellengebiets, der so noch nicht berücksichtigt wird, für den Energieübertritt ausschlaggebend. Außer in einer älteren von H. Weyl angeregten Untersuchung¹⁾ ist dieses Problem neuerdings in einer größeren Arbeit von J. Picht²⁾ ziemlich weitgehend diskutiert worden, der den Fall behandelt, daß nicht eine ebene Welle, sondern ein auf einen kleinen räumlichen Winkel beschränktes Lichtbündel aus dem optisch dichteren Mittel auf die Trennungsfläche unter einem mittleren im Gebiet der Totalreflexion gelegenen Winkel auffällt. Das bemerkenswerte Resultat dieser letzteren Untersuchung war, daß der übertretende Energiestrom sich im Zeitmittel in der Grenzfläche nach einer Kurve verteilt, die ein Maximum in den geometrischen Grenzen des Bündels hat und ähnlich wie eine Fresnelsche Beugungs-

1) E. Funk, Reflexion und Brechung optischer Kugelwellen und das Problem der Totalreflexion. Diss. T. H. Zürich, 1921.

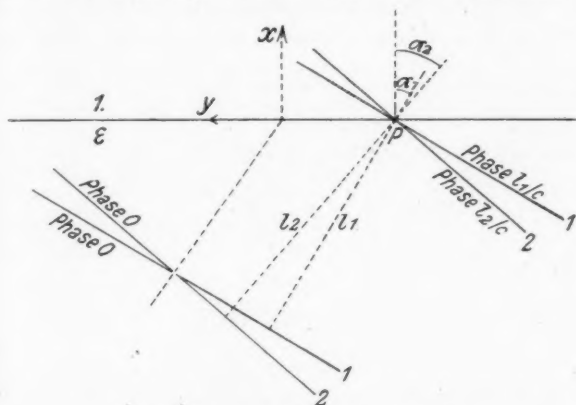
2) J. Picht, Beitrag zur Theorie der Totalreflexion. Ann. d. Phys. (5) 3. S. 433. 1929.

kurve verläuft, indem sie nach beiden Seiten rasch mit einigen Schwankungen abfällt (a. a. O. S. 463 Fig. 4, 5). Auffälligerweise ist aber die Richtung der Energieströmung nicht etwa gleichsinnig nach dieser Kurve verteilt, so daß etwa auf der einen Seite des Bündels die Energie zum optisch-dünnern Mittel überträte und auf der anderen Seite zurückflutete, wie man wohl zunächst erwarten würde, sondern es besteht eine feinere Unterteilung, nach der die Energie in viel kürzeren Abständen durch die Trennungsfläche hindurch hin- und herfließt. Die Ursache dieser Erscheinung, die im ganzen die Form einer Schwebung hat, ist bei dem mathematisch-komplizierten Charakter der ganzen Untersuchung nicht leicht zu durchschauen; einer Anregung aus Physikerkreisen folgend, will ich aber hier eine ganz elementare Erklärung dafür geben, die an einem vereinfachten Fall unter Beseitigung aller mathematischen Schwierigkeiten das physikalisch Wesentliche unmittelbar durchsichtig macht.

Die genannte Untersuchung geht davon aus, daß man ein solches Lichtbündel im Anschluß an P. Debye¹⁾ als ein Integral über ebene Wellen von unter sich gleicher Intensität darstellen kann, die sich sämtlich in dem geometrischen Brennpunkt des Bündels durchkreuzen, und deren Normalen den geometrischen Öffnungswinkel des Bündels erfüllen. Das für uns Wesentliche tritt aber schon dann in Erscheinung, wenn man statt dessen *nur 2 oder 3 sich in einer Linie durchkreuzende ebene Wellen* ins Auge faßt, die kleine Winkel miteinander einschließen. Die physikalische Erklärung ist nämlich so: Der Energiefluß wird nach dem Pointingschen Satze bekanntlich durch das Produkt der elektrischen Feldstärke E mit entsprechenden Komponenten der magnetischen Feldstärke H in der Lichtwelle gemessen. Bei einer einzelnen ebenen Welle haben die in Betracht zu ziehenden Komponenten von E und H gerade eine Phasenverschiebung von ein Viertel Wellenlänge untereinander, so daß ihr Zeitmittel gerade den Wert 0 ergibt. Wenn aber 2 Wellen von etwas verschiedener Richtung zusammenwirken, so ist z. B. auch das Produkt einer Kom-

1) P. Debye, Das Verhalten von Lichtwellen in der Nähe eines Brennpunktes oder einer Brennnlinie. Ann. d. Phys. (4) 30. S. 755. 1909.

ponente E_1 aus der ersten Welle mit einer Komponente H_2 aus der zweiten Welle in Betracht zu ziehen. Diese treffen in irgendeinem Punkte auf der Grenzfläche mit einer anderen, eben von dem Richtungsunterschied und der seitlichen Lage des Punktes abhängigen Phasenverschiebung ein, wie Fig. 1 ohne weiteres zeigt; ihr Produkt kann daher nicht mehr das Zeitmittel 0 ergeben, sondern zeigt eine harmonische Ab-



Entstehung der Phasenverschiebung

Fig. 1

hängigkeit von der Lagenkoordinate auf der Grenzfläche. Diese entspricht der genannten „Kräuselung“ der Energieübertrittskurve.

Um diese einfache Überlegung analytisch zu präzisieren, legen wir ein Koordinatensystem nach Fig. 1 fest: y - und z -Richtung in der Trennungsebene, x -Richtung in deren Normalen, und die einfallenden Wellen, zunächst 2, sollen sich in einer der z -Richtung parallelen Geraden durchkreuzen. Die Einfallswinkel der beiden Wellen seien α_1 und α_2 . Sie lassen sich also durch die Phasenfunktionen

$$(1) \quad e^{2\pi i \left(nt - \frac{x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1}{\lambda} \right)}, \quad \text{bzw.} \quad e^{2\pi i \left(nt - \frac{x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2}{\lambda} \right)}$$

beschreiben, wobei n die Frequenz pro Sekunde, λ die Wellenlänge im optisch dichteren Medium bedeutet, während λ_0 die

Also wird hier das Zeitmittel nach bekannten Regeln

$$(5) \quad \frac{4\pi}{c} \bar{S}_x = \frac{1}{2} (q_1 - q_2) \cdot E''_1 \cdot E''_2 \cdot \sin \left[\frac{2\pi y}{\lambda} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \right].$$

Diese Gleichung zeigt, daß die durch die Trennungsfläche hindurchtretende Energiestromkomponente \bar{S}_x in einer einfachen harmonisch-periodischen Abhängigkeit von der Koordinate y steht, und diese Periodizität entspricht der eingangs erwähnten Erscheinung. Denn ihre Periode $\frac{\lambda}{(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)}$ stimmt in der Tat mit der von Picht (a. a. O. S. 448, 463) berechneten in der Größenordnung überein, wenn man unseren Winkel $\alpha_1 - \alpha_2$ mit dem dort angenommenen Öffnungswinkel des Lichtbündels gleichmacht. Dies ist aber naturgemäß bei unserem Ansatz, bei dem die Wellen in der y -Richtung nicht begrenzt sind, die einzige Veränderlichkeit in der Verteilung der betreffenden Energiestromkomponente. Der obenerwähnte seitliche Intensitätsabfall, der analog einer Fresnelschen Beugungskurve verläuft, tritt hier noch nicht in Erscheinung. Wenn man aber außer den beiden betrachteten Wellen noch eine dritte hinzufügt, etwa mit dem Einfallswinkel $\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, so setzt sich der Energiestrom in unmittelbarer Übertragung der Gl. (5) aus drei Teilen zusammen, die sinngemäß in der Hauptsache von den drei Differenzen $\alpha_0 - \alpha_1$, $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_2 - \alpha_0$ abhängen. Man bekommt nämlich, wenn man diese drei Richtungsunterschiede als gering und die drei Amplituden E'' als annähernd gleich annimmt, ferner $y' = y \cos \alpha_0$ setzt, statt (5):

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \bar{S}_x &= \frac{1}{2} E''^2 (q_1 - q_2) \\ &\cdot \left[\sin (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{2\pi y'}{\lambda} + 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{2} \frac{2\pi y'}{\lambda} \right] \\ &= E''^2 (q_1 - q_2) \sin \frac{3}{4} (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{2\pi y'}{\lambda} \\ &\quad \cdot \cos \frac{1}{4} (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{2\pi y'}{\lambda}, \end{aligned} \right.$$

und sieht somit, daß diese Verteilung den Charakter einer ziemlich raschen *Schwebung* hat (Schwebungsperiode = 3 Schwingungsperioden), also schon Intensitätsanhäufungen des Energiestroms anzeigt. Je mehr Teilwellen man hinzufügt, desto mehr

konzentriert sich die Erscheinung zu dem Fresnelschen Intensitätsverlauf.

Der gedanklichen Entstehung nach ist der periodische Verlauf der Gl. (5), wie Fig. 1 am deutlichsten zeigt, ähnlich wie eine Fraunhofersche Beugungserscheinung erklärt, so daß man im Gesamtergebn die bekannte Überlagerung von Fresnelscher und Fraunhoferscher Beugung wiederfindet. Überraschend ist dabei nur, daß die letztere hier rascher veränderlich ist als die erstere, während man in der Optik sonst an das Umgekehrte gewöhnt ist. Aber das liegt daran, daß der Öffnungswinkel des Bündels in der numerischen Rechnung ziemlich groß, ungefähr 10° , gewählt war, während in der Beugungsoptik mit viel feineren Öffnungen gearbeitet wird. Bekanntlich rücken ja die Beugungsspektren mit zunehmender Größe der Öffnung enger zusammen.

(Eingegangen 6. Juli 1931)

Fre
erin
grap
ple
sam
den
such
eine
Wer
liegt
Effe
phy
Heu

lage
E. M
Hoo
stan
sitz

eing

S. 6

Untersuchungen über den Heulsummer^{*)}

Von W. L. Barrow

(Mit 41 Figuren)

Einleitung

In neuerer Zeit haben in der Physik Schwingungen, deren Frequenz periodisch geändert wird, Beachtung gefunden. Ich erinnere an die Frequenzmodulation in der drahtlosen Telegraphie, an die Methode der Frequenzvariation von E. V. Appleton und M. A. F. Barnett**) zur Bestimmung der wirklichen Höhe der Kennelly-Heavisideschicht und endlich an den sogenannten Heulsummer bei raumakustischen Untersuchungen. Man versteht darunter eine Schallquelle, meist einen Lautsprecher, dessen Frequenz periodisch sich ändert. Wenn die Periode der Änderung in einem bestimmten Gebiet liegt, beschreibt der Name „Heulton“ gut den physiologischen Effekt, den ein solcher Heulsummer hervorruft. Mit gewissen physikalischen Eigenschaften des Heulsummers und seines Heultons beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

I. Die Anordnung des Heulsummers

§ 1. Der Überlagerungssummer

Fast ausschließlich wird der Heulton mit einem Überlagerungssummer nach dem ursprünglichen Vorschlag von E. Meyer und P. Just¹³⁾ erzeugt. Er besteht aus zwei kleinen Hochfrequenz-Röhrengeneratoren, von denen der eine konstante, der andere eine periodisch veränderliche Frequenz besitzt. Die Überlagerung der beiden Schwingungen und Gleich-

^{*)} Gekürzte Dr.-Dissertation der Technischen Hochschule München eingereicht am 23. Dezember 1930.

^{**) E. V. Appleton u. M. A. F. Barnett, Proc. Royal Soc. A. 109. S. 621. 1925 und andere Arbeiten.}

Anordnung nach Fig. 2 verwenden. Sie besteht aus einem niederfrequenten Röhrengenerator, in dem die Induktivität des Schwingungskreises periodisch geändert wird. Dieser Schwin-

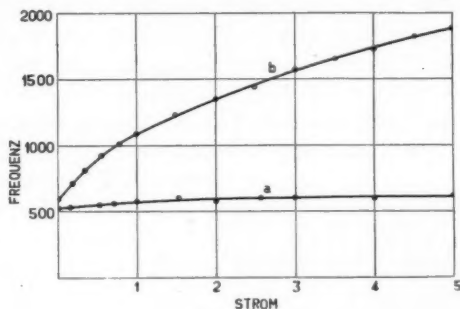


Fig. 3

gungskreis ($LC S_1 S_2$ in Fig. 2) besitzt außer der Spule L zwei Spulen S_1 und S_2 auf geschlossenen Kernen von Hypernick, einem Permalloy von besonders geringen Hysteresisverlusten. Die Kerne sowohl wie die Spulen S_1 , S_2 sind möglichst gleich hergestellt. Die Induktivität der Spulen S_1 , S_2 wird periodisch geändert, indem man den Strom einer Gleich- (G) und einer Wechselstrommaschine (W) durch die Spulen U_1 und U_2 leitet, die möglichst genau gleich auf die Kerne und zwar in entgegengesetztem Sinn gewickelt sind. Die Gegenschaltung ist notwendig, damit nicht der Wechselstrom der Maschine W auf dem Schwingungskreis induziert.

Man bekam mit dieser Anordnung tatsächlich im Schwingungskreis $CLS_1 S_2$ eine niederfrequente Schwingung, deren Frequenz im Tempo des Wechselstroms der Maschine W periodisch sich

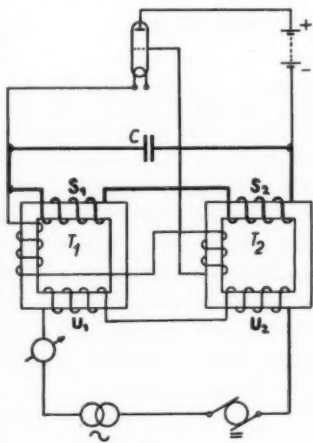


Fig. 4

änderte und deren Amplitude, wie die Oszillogramme zeigten, merklich konstant war.

Der Nachteil der Anordnung war der, daß die periodische Änderung der Frequenz verhältnismäßig klein war. Fig. 3 Kurve *a* gibt die Frequenz in Abhängigkeit von einem durch die Spulen U_1, U_2 geschickten Gleichstrom. Eine viel stärkere Änderung — und zwar diejenige von Kurve *b* Fig. 3, die unter sonst gleichen Umständen wie Kurve *a* aufgenommen wurde — erhält man, wenn man die Schaltung von Fig. 2 in diejenige

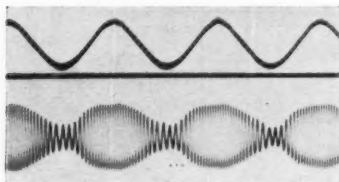


Fig. 5*)

von Fig. 4 umändert. Sie hat aber den Nachteil, daß die Amplitude sich ebenfalls periodisch ändert. Fig. 5 untere Kurve zeigt das Oszillogramm eines solchen Stroms mit starker Änderung der Frequenz (die obere Kurve ist der Strom in den Spulen U_1, U_2). Diese periodische Änderung der Amplitude läßt sich fast vollkommen vermeiden, wenn man auf das Gitter eine Spannung von der Periode der Maschine W mit richtiger Phase und Amplitude und bei richtiger Vorspannung wirken läßt.

II. Spektrale Zerlegung des Heultones

§ 3. Theoretisches

Die erste theoretische Behandlung einer Schwingung von periodisch veränderlicher Frequenz rührt von J. R. Carson her.***) Sein Ergebnis ist folgendes. Der Heulton, d. h. eine Schwingung mit periodisch veränderlicher Frequenz, ist definiert durch eine Zeitabhängigkeit der Form:

$$(1) \quad f(t) = \sin 2\pi(f_0 + \Delta f \cdot \sin 2\pi \alpha t)t.$$

Es soll heißen:

$$\begin{aligned} f_0 & \text{ die Mittelfrequenz} \\ 2 \cdot \Delta f & \text{ der Heulbereich} \\ \alpha & \text{ die Heulfrequenz.} \end{aligned}$$

*) In diesen und allen folgenden Oszillogrammen läuft die Zeitachse von links nach rechts.

**) Neuerdings haben sich mit derselben Aufgabe Balh. van der Pol²⁾ und H. Salinger³⁾ beschäftigt.

Sind die Verhältnisse so, daß

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta f \ll f_0 \\ \alpha \ll f_0 \end{cases}$$

ist, so kann man statt (1) schreiben:

$$f(t) = \sin(2\pi f_0 t + \frac{\Delta f}{\alpha} \sin 2\pi \alpha t),$$

das heißt, die periodisch veränderliche Frequenz durch eine periodisch veränderliche Phase ersetzen. Dieser Ausdruck läßt sich auf die Form bringen:

$$(3) \quad f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n \left(\frac{\Delta f}{\alpha} \right) \sin 2\pi (f_0 + n \alpha) t$$

worin $J_n \left(\frac{\Delta f}{\alpha} \right)$ Besselsche Funktionen erster Gattung und n -ter Ordnung sind.

Gleichung (3) stellt die Spektralverteilung des Heultones dar. Man erkennt, daß diskrete Frequenzen symmetrisch um die Mittelfrequenz f_0 entstehen, und zwar liegen die Frequenzen dieser Komponenten um α auseinander mit Amplituden von der Größe $J_n \left(\frac{\Delta f}{\alpha} \right)$.

Van der Pol²⁾ hat gezeigt, daß die Amplituden der außerhalb des Heulbereiches liegenden Komponenten so klein sind, daß wir sie im Verhältnis zu den Amplituden der Komponenten innerhalb des Heulbereichs praktisch vernachlässigen können. Da ihr Abstand α und der Heulbereich $2 \cdot \Delta f$ ist, so ist die Zahl dieser Komponenten gleich $2 \cdot \Delta f / \alpha$, also um so größer, je größer der Heulbereich und je kleiner die Heulfrequenz ist. Eine *langsame* periodische Änderung der Frequenz (α klein) bedeutet also bei vorgegebenem Heulbereich eine besonders *große* Anzahl von Komponenten beträchtlicher Amplitude.

§ 4. Erweiterung der Theorie

Man kann bei den Anordnungen, die zur Herstellung eines Heultones dienen, im allgemeinen nicht damit rechnen, daß der Strom des Heultongenerators oder gar der Schalldruck, den ein von ihm gespeister Lautsprecher liefert, die einfache Form von Gl. (1) besitzt. Im allgemeinen wird vielmehr die

periodische Änderung der Frequenz von einer periodischen Änderung der Amplitude begleitet sein.

Der einfachste Fall ist der, daß die Amplitudenänderung sinusförmig von der Heulfrequenz α ist. Dann kann man unter denselben Bedingungen, die der Gl. (3) zugrundeliegen, den Heulton schreiben als

$$(4) \quad f(t) = \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n \left(\frac{Af}{\alpha} \right) \cdot \sin 2\pi (f_0 + n\alpha)t \right\} (1 + c \cos 2\pi \alpha t).$$

Unter Benutzung der bekannten Beziehung

$$J_{-n} \left(\frac{Af}{\alpha} \right) = (-1)^n J_n \left(\frac{Af}{\alpha} \right)$$

und nach einiger Umformung wird

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} f(t) = & \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} J_n \left(\frac{Af}{\alpha} \right) \sin 2\pi (f_0 + n\alpha)t \right. \\ & + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n J_n \left(\frac{Af}{\alpha} \right) \sin 2\pi (f_0 - n\alpha)t \left. \right\} \\ & \cdot (1 + c \cos 2\pi \alpha t). \end{aligned} \right.$$

Das läßt sich überführen in

$$\begin{aligned} f(t) = & \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ J_n \left(\frac{Af}{\alpha} \right) + \frac{c}{2} J_{n-1} \left(\frac{Af}{\alpha} \right) \right. \\ & + \frac{c}{2} J_{n+1} \left(\frac{Af}{\alpha} \right) \left. \right\} \sin 2\pi (f_0 + n\alpha)t \\ & + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left\{ J_n \left(\frac{Af}{\alpha} \right) + \frac{c}{2} J_{n-1} \left(\frac{Af}{\alpha} \right) \right. \\ & + \frac{c}{2} J_{n+1} \left(\frac{Af}{\alpha} \right) \left. \right\} \sin 2\pi (f_0 - n\alpha)t. \end{aligned}$$

Wendet man noch die Rekursionsformel:

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$

an, so bekommt man als Spektrum des auch in der Amplitude modulierten Heultones:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} f(t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{cn}{(\Delta f/\alpha)} \right\} J_n \left(\frac{\Delta f}{\alpha} \right) \sin 2\pi(f_0 + n\alpha)t \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ 1 + \frac{cn}{(\Delta f/\alpha)} \right\} J_n \left(\frac{\Delta f}{\alpha} \right) \sin 2\pi(f_0 - n\alpha)t. \end{aligned} \right.$$

Hier ist die Amplitude der n -ten Komponente gegeben durch:

$$(7) \quad \left\{ 1 + \frac{cn}{(\Delta f/\alpha)} \right\} J_n \left(\frac{\Delta f}{\alpha} \right),$$

welche für $c = 0$ in $J_n \left(\frac{\Delta f}{\alpha} \right)$ übergeht, wie es sein muß. Die prozentuale Änderung der Amplitude der n -ten Komponente ist

$$\frac{\left\{ 1 + \frac{cn}{(\Delta f/\alpha)} \right\} J_n \left(\frac{\Delta f}{\alpha} \right) - J_n \left(\frac{\Delta f}{\alpha} \right)}{J_n \left(\frac{\Delta f}{\alpha} \right)} = \frac{cn}{(\Delta f/\alpha)}.$$

Da c , n und Δf alle positive Größen sind, so besteht der Einfluß der Amplitudenmodulation in einer Verstärkung der Komponenten. Für $n = 0$ (das heißt, für die Mittelfrequenz f_0) tritt keine Verstärkung ein. Der Einfluß wächst mit n , so daß die Komponenten, deren Frequenz am weitesten von f_0 entfernt sind, viel stärker beeinflußt werden. Infolgedessen ist die wirksame Breite des Heultones bei Amplitudenmodulation größer als diejenige ohne eine solche. Da aber für praktische Zwecke (vgl. § 11) $\Delta f/\alpha$ groß gewählt wird und in die Berechnung $\left(\frac{c}{(\Delta f/\alpha)} \right)$ eingeht, so wird man mindesten für die Komponenten mit nicht zu großer Ordnungszahl n keinen sehr großen Einfluß der Amplitudenmodulation erwarten dürfen.

Bei dieser Berechnung war eine sinusförmige Amplitudenmodulation angenommen. Im allgemeinen wird aber diese Modulation, die von der Frequenzabhängigkeit des Lautsprechers herrührt, komplizierter sein (vgl. Fig. 27). Man hat in diesem Fall für die Amplitudenmodulation ebenfalls eine Fouriersche Reihe anzusetzen. Auch dieser Fall läßt sich ohne Schwierigkeit durchführen mit dem Ergebnis, daß die Amplituden der außerhalb des Heulbereichs liegenden Komponenten vergrößert werden.

Endlich wird ein Lautsprecher, der von dem Heulgenerator betrieben wird, Obertöne liefern. Die Durchrechnung dieses Falles führt zu dem Resultat, daß in der Umgebung jedes Obertones ein Spektrum ähnlicher Art entsteht, wie in dem einfachen Fall von (1) um die Mittelfrequenz.

§ 5. Experimentelle Analyse des Heultons

Nach der theoretischen Analyse § 1 liegen die Frequenzen der einzelnen Komponenten um die Heulfrequenz α auseinander. Verwendet man also, wie es meist geschieht, eine Heulfrequenz zwischen 5 und 20/sec und nimmt man als Mittelfrequenz f_0 eine solche in der Gegend von z. B. 1000/sec, so stellt die experimentelle Analyse eines solchen Tones verhältnismäßig hohe Anforderungen an das Auflösungsvermögen der analysierenden Anordnung, für die die bisher zur Analyse gebrauchten Methoden nicht immer genügen.*)

a) Oszillographische Analyse der Schwingung

Ich habe deshalb eine Methode ausprobiert, die den Nachteil hat, daß sie einen Oszillographen braucht und keinen quantitativen Aufschluß über die Amplituden der einzelnen Komponenten gibt, die sich aber wegen ihres großen Auflösungsvermögens gerade für den vorliegenden Fall als gut brauchbar erwiesen hat. Sie benützt wie Grützmacher⁶⁾ und Suits⁷⁾ einen Suchton. Darunter versteht man einen sinusförmigen Ton (beispielsweise Spannung), mit annähernd konstanter Amplitude, dessen Frequenz kontinuierlich von einer unteren bis zu einer oberen Grenze variiert wird.

Der Suchton wurde mit einer dem Überlagerungsheulsummer (Fig. 1) ähnlichen Anordnung hergestellt, nur wurde der schnellrotierende Heulkondensator mit einem genau auf Frequenz geeichten Kondensator vertauscht, der mittels eines elektrischen Motors und einer Übersetzung sehr langsam gedreht wurde. In die in Frequenzen geeichte Drehskala dieses Kondensators waren kleine Zacken eingeschnitten, die einen

*) Das gilt in erster Linie von den üblichen Resonanzmethoden. Aber auch diejenige von M. Grützmacher⁶⁾ (vgl. z. B. dessen Fig. 4) und diejenige von C. G. Suits⁷⁾ können Schwierigkeiten ergeben.

Kontaktmechanismus so betrieben, daß der Strom durch eine Oszillographenschleife beim Durchlaufen von gewissen Skalenpunkten unterbrochen wurde; so konnte die Skala auf den oszillographischen Aufnahmen registriert werden. Der Suchtonsummer liefert einen gut sinusförmigen Strom von praktisch konstanter Amplitude in dem verwendeten Frequenzbereich von 100—1000/sec.

Es wird nun die zu analysierende Spannung (f_z) einfach derjenigen des Suchtones (f_s) superponiert und ihre Resultierende durch eine Schleife oszillographiert; zu gleicher Zeit

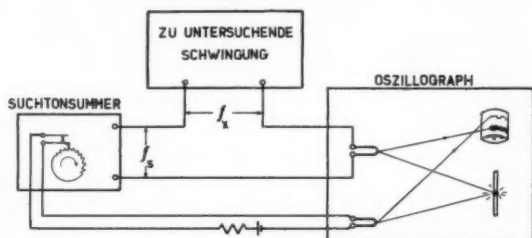


Fig. 6

werden die Frequenzmarken des oben beschriebenen Mechanismus mittels einer zweiten Schleife aufgenommen. Fig. 6 zeigt die Anordnung.

b) Anwendung auf einen einfachen Ton

Wendet man die Methode zuerst auf einen einfachen Ton an, so ergeben sich die Bilder von Fig. 7. Dabei war die Frequenz des konstanten Tones 190/sec, während die Suchtonfrequenz am linken Ende etwas weniger als 190/sec und am rechten Ende etwas größer als 380/sec war. In der Figur treten die Frequenzverhältnisse 1:1 und 1:2 besonders hervor. Besonders einfach ist das Bild des resultierenden Stromes beim Frequenzverhältnis 1:1. Dabei ist allerdings zu bemerken, daß die Form des Bildes bei dem Frequenzverhältnis 1:1 noch von der Phasenverschiebung der beiden superponierten Ströme abhängt; in Fig. 8 sind Bilder wiedergegeben, die dem Frequenzverhältnis 1:1, aber verschiedenen Phasenverhältnissen entsprechen.

Das Amplitudenverhältnis der beiden Ströme beeinflusst auch die Form des entstehenden Bildes, aber nur insofern als die Tiefe der Täler und Berge des Bildes in Betracht kommt.

Auf diese Tatsache gründet sich die vorliegende Methode. Handelt es sich um die Analyse eines beliebigen Gemisches von Tönen, so erscheint, wenigstens dem Charakter nach, dasselbe Bild an allen Stellen, an denen die Frequenz des Suchtons eine in dem Gemisch enthaltene Frequenz passiert.

Im übrigen zeigt Fig. 7 die typischen Figuren, die man für verschiedene andere Frequenzverhältnisse des Suchtons zu der Schwingung konstanter Frequenz erhält. Man kann auf dem Bild deutlich unterscheiden die Figuren für die Frequenzverhältnisse

$$\frac{1}{1} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{9}{5} \quad \frac{11}{6} \quad \frac{2}{1}$$

Sie sind um so deutlicher und breiter, je kleiner die ganzen Zahlen sind, die das Frequenzverhältnis bestimmen. Natürlich erhält man auch ähnliche Figuren nicht nur in der zwischen dem Verhältnis 1:1 und 2:1 liegenden Oktave; aber die in der zweiten, dritten usw. Oktave liegenden Figuren sind komplizierter und enger.

Ein Vergleich zwischen den hier beschriebenen Erscheinungen und den bekannten Lissajousfiguren liegt nahe. Die Stellen der Konsonanzintervalle, für die die Lissajousfiguren stationär sind, machen sich durch Figuren von bestimmtem Typ bemerkbar.

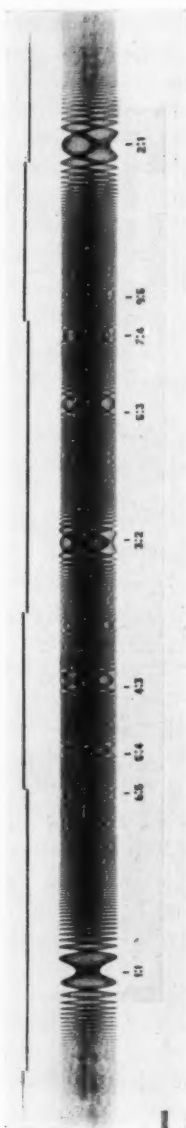


Fig. 7

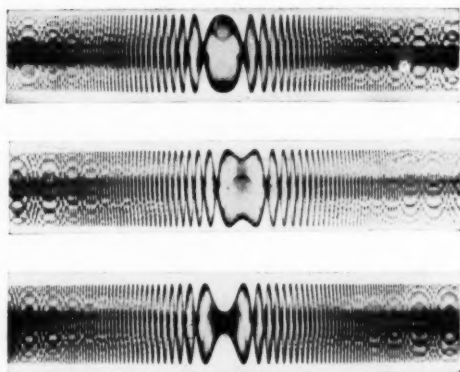


Fig. 8

c) Analyse zweier Töne

Wie die Methode im Fall von zwei Tönen arbeitet, soll an zwei verschiedenen praktisch wichtigen Beispielen gezeigt werden.

Das erste ist ein Ton und seine zweite Harmonische, das heißt zwei Frequenzen im Verhältnis 2:1, und zwar war bei

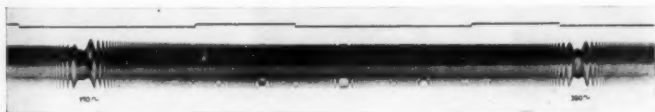


Fig. 9

den Versuchen die eine 190, die andere 380/sec. Das Bild, das man bei Anwendung der Methode erhielt, ist dasjenige von Fig. 9. Man kann hier sowohl bei der Frequenz 190 als bei 380/sec sehr gut das typische Bild (vgl. Fig. 7) des Durchgangs des Suchtons durch diese Frequenzen unterscheiden. Dabei sind in diesem Fall die Verhältnisse deshalb besonders kompliziert, weil z. B. beim Durchgang der Frequenz des Suchtones durch 190/sec gleichzeitig, infolge der Überlagerung des Suchtones über die Schwingung mit der Frequenz 380/sec, das Bild für das Frequenzverhältnis 1:2 miterscheint.

Der zweite Fall ist der von zwei sehr nahe aneinanderliegenden Frequenzen. Hier erhebt sich die Frage, wie nahe die zu analysierenden Frequenzen liegen dürfen, damit sie durch die Methode noch auflösen sind. Das Auflösungsvermögen der Methode hängt ganz wesentlich ab von der Geschwindigkeit, mit der die Frequenz des Suchtones geändert wird und praktisch auch von der Geschwindigkeit des Oszillo-

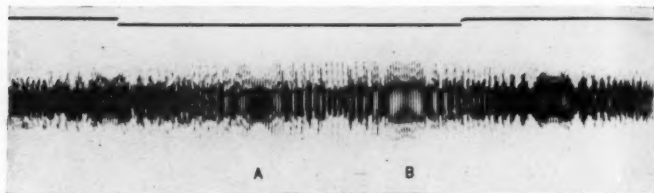


Fig. 10

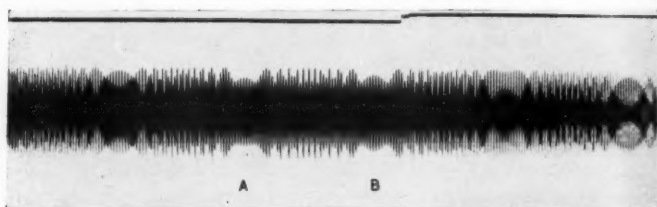


Fig. 10a

graphenpapiers. In Fig. 10 z. B. ist das Bild wiedergegeben, das zwei Töne — der eine hatte ungefähr die Frequenz 500/sec — mit einem Frequenzunterschied von 40/sec lieferten bei einer zeitlichen Änderung der Frequenz des Suchtones von 20/sec² und verhältnismäßig raschem Ablauf des Oszillographenstreifens; die beiden Frequenzen sind bei A und B deutlich erkennbar. Betrug der Unterschied nur 4/sec, so ließen sich die Frequenzen mit derselben Anordnung nicht mehr trennen, wohl aber, wenn jetzt die Frequenzänderung des Suchtones auf 4/sec² verlangsamt wurde (Fig. 10a). Das Auflösungsvermögen der Methode kann auf diese Weise also sehr hoch gesteigert werden.

prüf
mitt
(Fig.
Verf
mit

$\alpha =$
Spek
erwa

Ton
tatsä
die s
sehr
sind.
gena

lesen,
größe
größe

d) Analyse des Heultons

Es wird jetzt möglich, die Zerlegung [§ 3, Gl. (3)] zu prüfen, indem man einen elektrischen Heulton nach Gl. (1) mittels des schon beschriebenen Niederfrequenz-Heultons (Fig. 2) herstellt, und diesen mit dem oben beschriebenen Verfahren analysiert.

Wir betrachten zunächst die Analyse eines Heultons mit den folgenden Eigenschaften: $f_0 = 1038$, $\Delta f = \pm 13$,

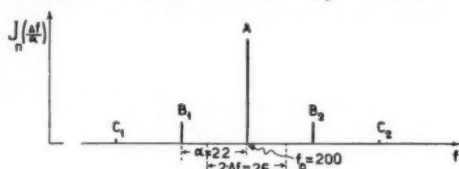


Fig. 11

$\alpha = 25/\text{sec}$, $\Delta f/\alpha = 0,5$. Das aus § 3, Gl. (3) berechnete Spektrum dieses Heultons ist in Fig. 11*) gezeigt. Danach erwarten wir also drei Teiltöne, von denen nur der mittlere

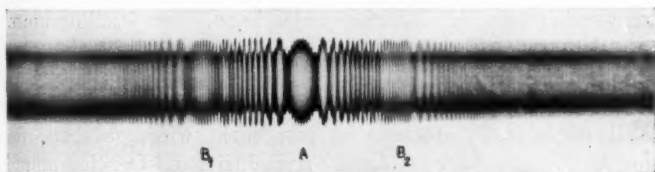


Fig. 12

Ton eine verhältnismäßig große Amplitude besitzt. Daß dies tatsächlich der Fall ist, erkennt man leicht aus Fig. 12, wo die sehr stark ausgesprochene Mittelfrequenz A und die beiden sehr schwachen Seitenfrequenzen B_1 , B_2 deutlich zu sehen sind. Die gemessenen Frequenzen dieser Komponenten stimmen genau mit den berechneten Werten überein.**)

*) Die Zahlen dieser Figur sind entsprechend zu ändern.

**) Man kann die Zusammensetzung auch aus den Figuren 2:1 ablesen, statt, wie oben, aus den Figuren 1:1. Man erhält dadurch ein größeres Auflösungsvermögen, da die Figuren 2:1 einen doppelt so großen Frequenzunterschied wie die Figuren 1:1 haben.

Nun wird ein ganz anderer Heulton betrachtet, bei dem $f_0 = 1100$, $\Delta f = \pm 100$, $\alpha = 25/\text{sec}$, $\Delta f/\alpha = 4$ war. Das Spektrum nach der Zerlegung (§ 3) ist dasjenige von Fig. 13. Es entsteht eine starke Mittelfrequenz A , die nächstliegenden Frequenzen B_1 , B_2 fallen fast weg, dann kommen drei Komponenten G_1 , D_1 , E_1 bzw. G_2 , D_2 , E_2 von nicht viel verschiedener, und dann noch ein Paar F_1 , F_2 von verhältnismäßig geringer Intensität; die letzteren liegen schon außerhalb des Heulbereichs. Die Amplituden der anderen Komponenten

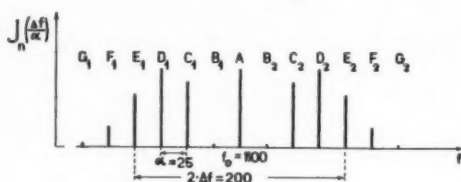


Fig. 13

sind so schwach, daß ihr Erscheinen in den Analysefiguren von vornherein nicht erwartet werden kann. Das Oszillogramm bestätigte diese Zerlegung durchaus, jedenfalls bezüglich der Frequenzen der einzelnen Komponenten und wenigstens ganz qualitativ auch bezüglich der Amplitudenverhältnisse. Die oszillographische Aufnahme ist hier nicht wiedergegeben, da sie im Maßstab der anderen reproduzierten Oszillogramme nicht genügend klar ist. Eine Reproduktion in einem genügend großen Maßstabe würde eine zu große Zumutung an den Verlag dieser Zeitschrift bedeuten haben. — Dieser Fall, in dem $f_0/\Delta f = 11$ ist, liegt im übrigen schon an der Grenze, für die die Zerlegung von § 3 noch Gültigkeit beanspruchen kann.

III. Die Wirkung des Heultones auf Schwingungskreise

§ 6. Zusammensetzung der Kreise und Untersuchungsmethode

Zwei verschiedene Schwingungskreise wurden untersucht; einer hatte starke Dämpfung, der andere geringe. Die Kreise wurden auf Dämpfung geprüft, indem der Stromlauf für gedämpfte Schwingungen mit dem Oszillographen photographiert

und das logarithmische Dekrement $\delta = \frac{R}{2fL}$ daraus berechnet wurde.*)

Die Resonanzkurven (Fig. 14) wurden oszillographisch aufgenommen, indem man die Suchtenspannung an den Schwingungskreis legte**) und den dadurch erzeugten Strom als Funktion der Frequenz oszillographierte. Bei diesen Aufnahmen lag die Oszillographenschleife im Kreis selbst; ihr Widerstand von nur 1 Ohm übte nur geringen Einfluß auf die Resultate aus.

Die im folgenden beschriebenen Aufnahmen wurden mit der in Fig. 15

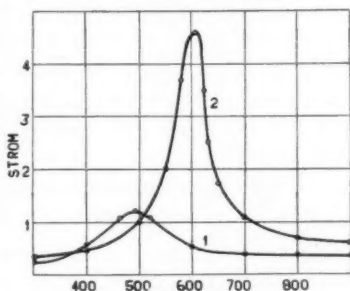


Fig. 14

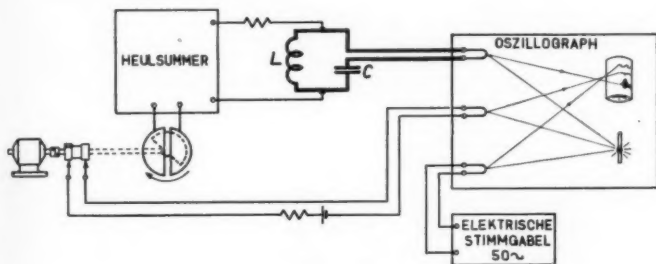


Fig. 15

*) Die Konstanten der beiden Kreise waren:

Kreis Nr. 1 (stark gedämpft)

Induktivität = 0,049 H

Kapazität = 2 μ F

Logar. Dekrement = 0,486

Eigenfrequenz = 510/sec.

Kreis Nr. 2 (wenig gedämpft)

Induktivität = 0,275 H

Kapazität = 0,25 μ F

Logar. Dekrement = 0,077

Eigenfrequenz = 606/sec.

**) Die Frequenz des Suchtons wurde dabei sehr langsam geändert.

wiedergegebenen Anordnung gemacht. Der Heulsummer war der Überlagerungssummer von Fig. 1. Der rotierende Kondensator wurde mit einem Kontakttring versehen, der eine kleine Batterie über eine Oszillographenschleife so einschaltete, daß jedesmal, wenn der Heulton durch seine höchste bzw. tiefste Frequenz hindurchging, eine Markierung auf dem Filmstreifen registriert wurde. Diese zeigt der mittlere Linienzug der folgenden Aufnahmen; der oberste ist eine von einer elektrisch betriebenen Stimmgabel herrührende Zeitmarke von der Frequenz 50/sec und der dritte ist der im Schwingungskreis fließende Strom.

§ 7. Untersuchung des stark gedämpften Kreises

Zunächst wurde der von einer Heultonspannung im Kreis 1 erzeugte Strom oszillographiert. Die zu erwartenden Stromkurven zweier Fälle sind in Fig. 16 aus der schon be-

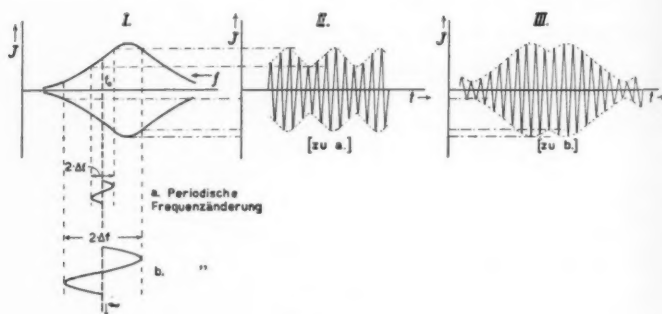


Fig. 16

sprochenen Resonanzkurve (Fig. 14) graphisch abgeleitet unter der Annahme, daß der Strom im Kreis jederzeit der aufgedrückten Spannung proportional ist. Das links stehende mit „I.“ bezeichnete Diagramm drückt die Abhängigkeit der Stromamplitude von der Frequenz aus; in die Figur sind die Frequenzbereiche für zwei verschiedene Heultöne (a) und (b) eingezeichnet. Wenn die Frequenz des Heulsummers innerhalb des Heulbereiches periodisch variiert wird, dann muß die Amplitude des im Schwingungskreis fließenden Stromes nach

der hier bezeichneten Abhängigkeit schwanken, wie es in den Diagrammen *II* und *III* skizziert ist.

Der Fall (a) zeigt einen Heulton mit verhältnismäßig kleinem Heulbereich, der vollkommen auf dem linearen Teil der Resonanzkurve bleibt, und infolgedessen einen Strom *II* verursacht, dessen Enveloppe fast sinusförmig ist (eine sinusförmige Änderung der Frequenz ist vorausgesetzt). Dieser Zustand ist oszillographiert worden (Fig. 17: $f_0 = 560$, $\Delta f = \pm 50$ und $\alpha = 15/\text{sec}$). Auf der Aufnahme bedeutet *T* die tiefste Frequenz und *H* die höchste.

Der Heulton des Falles (b) ist derart, daß der Heulbereich sich weit über den linearen Teil der Resonanzkurve hinaus erstreckt; außerdem wird die Eigenfrequenz durchschritten.

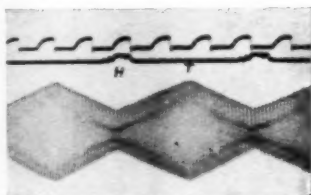


Fig. 17

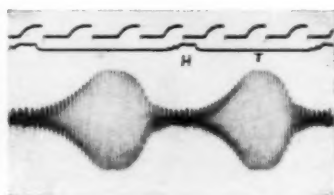


Fig. 18

In der Fig. 16, *III* ist die nach der obigen Methode abgeleitete Stromkurve gezeigt, in Fig. 18 ($f_0 = 550$, $\Delta f = \pm 180$ und $\alpha = 15/\text{sec}$) das Oszillogramm. Es besitzt eine gewisse Unsymmetrie; wenn die momentane Heulfrequenz mit der Eigenfrequenz übereinstimmt, zeigen die hervorgerufenen Schwingungen noch während einer kurzen Zeit eine größere Amplitude als dem stationären Zustand entspricht, und es tritt dadurch eine Art Interferenzerscheinung ein.

§ 8. Untersuchung des schwach gedämpften Kreises

Der Kreis Nr. 2 hat ein wesentlich kleineres Dekrement. Man erwartet deshalb ausgesprochenere Interferenzerscheinungen als bei dem stark gedämpften Kreis Nr. 1 und eine größere Unsymmetrie.

Eine erste Gruppe von Aufnahmen bezog sich auf den Fall, daß die Mittelfrequenz (710/sec) und die Heulfrequenz ($\alpha = 17/\text{sec}$) konstant gelassen und der Heulbereich Δf geändert wurde, und zwar hatte er bei den aufeinanderfolgenden

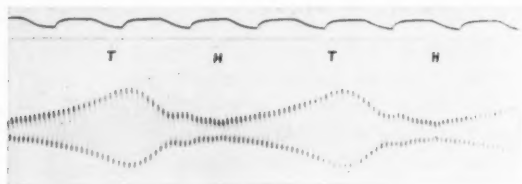


Fig. 19

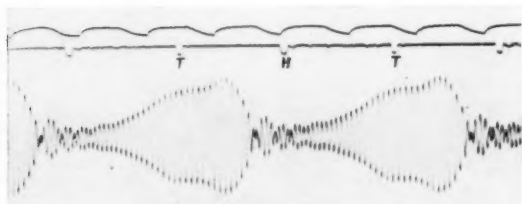


Fig. 20

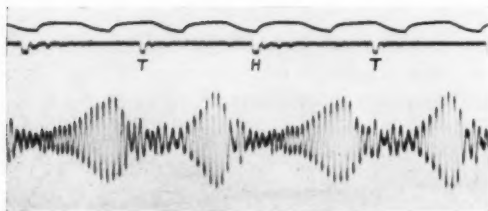


Fig. 21

Aufnahmen Δf der Reihe nach die Werte 33, 80, 140 und 300/sec. Der erste Fall ($\Delta f = \pm 33/\text{sec}$) ergab eine Schwingung, deren Amplitude bei der tiefsten Frequenz des Heultons ein ganz schwaches Maximum, bei der höchsten ein schwaches Minimum hatte. Die drei anderen Aufnahmen sind in den Figg. 19—21

wiede
Figg.
sind
Bedin
Dies
der i
als 2

nanz
mit z
summ
schon
haben
entst
klein
mit i
(und

wiedergegeben. Die Bedingungen waren dieselben, wie bei den Figg. 17 und 18 und wie sie in Fig. 16 schematisch dargestellt sind. Diese Figur zeigt ohne weiteres, warum unter diesen Bedingungen die Amplitude mit wachsendem Δf größer wird. Dies gilt bis Fig. 20, bei der Δf ungefähr den Betrag hatte, der in Fig. 16b eingetragen ist.

Der Grund für die Schwebungen, die sowohl in Fig. 20 als 21 auftreten, ist im wesentlichen der, daß die im Reso-

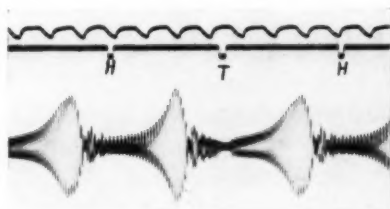


Fig. 22

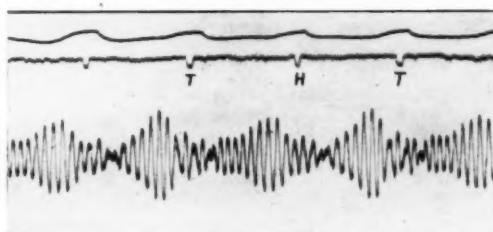


Fig. 23

nanzgebiet besonders stark erregten Eigenschwingungen noch mit ziemlich starker Amplitude andauern, wenn die vom Heulsummer erzwungenen Schwingungen sich in ihrer Frequenz schon erheblich von derjenigen der Eigenschwingung entfernt haben. Durch das Zusammenwirken der beiden Schwingungen entstehen die Schwebungen. Daß die Amplitude in Fig. 21 kleiner wird als bei Fig. 20 kommt daher, daß bei Fig. 21 mit ihrem großen Δf das Resonanzgebiet rascher durchlaufen (und zwar einmal beim Anstieg und einmal bei dem Abfallen

der Frequenz), und damit dem Kreis nicht Zeit gelassen wird, sich ebenso hoch aufzuschaukeln wie in Fig. 20.

Bei einer zweiten Gruppe von Aufnahmen war die Mittelfrequenz (713/sec) und der Heulbereich ($\Delta f = 298/\text{sec}$) konstant, während der Heulfrequenz α verschiedene Werte, und zwar der Reihe nach 3, 7, 11 und 25/sec, erteilt wurden. Die Bedingungen waren bei allen so, daß während der Heulperiode der Resonanzpunkt zweimal überschritten wurde. Fig. 22 gibt die Verhältnisse für $\alpha = 7$ und Fig. 23 für $\alpha = 25/\text{sec}$. Das Bild bei $\alpha = 3/\text{sec}$ unterschied sich wenig von Fig. 22 und das Bild für $\alpha = 11/\text{sec}$ lag, wie zu erwarten, etwa in der Mitte zwischen Fig. 22 und 23.

IV. Die raumakustische Wirkung des Heultones

Bei akustischen Messungen in einem Raum spielen die örtlichen und zeitlichen Interferenzen, die durch die Reflexion an den Wänden hervorgerufen werden, eine sehr störende Rolle, gleichgültig, ob es sich darum handelt, die akustischen Eigenschaften des Raumes [vgl. Literatur ⁸⁾, ⁹⁾, ¹⁰⁾, ¹¹⁾] selbst zu untersuchen oder in dem Raum irgendwelche Materialuntersuchungen [vgl. Literatur ⁴⁾, ⁵⁾, ¹²⁾, ¹³⁾, ¹⁴⁾, ¹⁵⁾] vorzunehmen. Die Folge davon ist, daß z. B. der Verlauf der Amplitude bei Anhall oder Nachhall nicht annähernd einem exponentiellen Gesetz folgt und ganz verschieden ausfällt, wenn der Ort des Empfängers oder die Frequenz nur ganz wenig geändert wird. Ähnliches gilt, wenn man die Schalldruckkurve von irgendwelchen Tongruppen aufnimmt. Es ist deshalb z. B. unmöglich, aus dem zeitlichen Verlauf des Nachhalls eine definierte Nachhallzeit zu ermitteln. Daran kann kein Aufnahmeverfahren etwas ändern, und es ist ganz gleichgültig, ob man mit dem Oszillographen den wirklichen zeitlichen Ablauf der Schallamplitude mißt, oder irgendeine Vorrichtung verwendet, die die Zeit festlegt, nach der die Schallamplitude einen gewissen Minimalwert erreicht hat.¹⁶⁾

Zur Vermeidung dieser Schwierigkeit sind eine ganze Anzahl von Verfahren angegeben worden. Eines der bequemsten ist zweifellos die Verwendung eines Heultones⁴⁾, dessen periodische Änderung der Frequenz ausgesprochene zeitliche und örtliche Interferenzen nicht aufkommen lassen

soll. Mit der Verwendung eines solchen Heulsummers für akustische Messungen hat sich in der letzten Zeit hauptsächlich E. Meyer^{13), 14), 15)} beschäftigt. Im folgenden soll eine Anzahl von allgemeinen Fragen besprochen werden, die bei der raumakustischen Verwendung von Heulsummern auftreten, und es soll ihre Wirkung an einigen Beispielen gezeigt werden.

§ 9. Untersuchungsmethode

Zur Untersuchung der zeitlichen Interferenzerscheinungen wurde einem Lautsprecher ein von einem Heulsummer herrührender Strom zugeführt. Für die Anhall- bzw. Nachhallaufnahmen wurde dieser Strom nur einmal eingeschaltet bzw. ausgeschaltet; für die Tongruppenaufnahmen unterbrach ein periodischer Unterbrecher im Stromkreis den Ton des Lautsprechers in regelmäßigen Zeitintervallen.

Die von mir verwendeten Apparate und Methoden sind im wesentlichen identisch mit denjenigen, die E. Scharstein⁶⁾, W. Schindelin⁹⁾, W. Kuntze¹⁰⁾ und W. Linck¹¹⁾ in ihren Arbeiten beschrieben haben. Die vom Oszillographen aufgenommenen Diagramme, z. B. Fig. 30, enthalten untereinander drei Kurvenzüge. Der obere Kurvenzug gibt die Zeitmarken einer Stimmgabel von 50 Perioden/sec wieder. Der mittlere Kurvenzug ist in einigen Aufnahmen der Strom im Lautsprecher, in anderen der Strom in einem durch den Unterbrecher geschlossenen Nebenschluß; er zeigt in beiden Fällen die Zeit der Schalleinschaltung bzw. Schallausschaltung oder die Dauer von Schallsendung und Schallpause an. Der untere Kurvenzug gibt die verstärkte Mikrofonspannung und damit annähernd den zeitlichen Verlauf der Schalldruck-Amplitude wieder.

Für die Untersuchung der örtlichen Interferenzwirkungen wurde die Verteilung der Schalldruckamplitude längs eines Weges im gegebenen Raum oszillographisch registriert. Die mittlere Kurve auf diesem Oszillogramm (z. B. 34) ist eine Wegmarke, die alle 25 cm Weg einen Zacken aufweist.

§ 10. Einfluß der Frequenzcharakteristik der Gesamtapparatur

Es ist verhältnismäßig leicht, einen elektrischen Strom zu erzeugen, dessen Amplitude annähernd konstant, dessen

Frequenz periodisch veränderlich ist, der also der Gl. (1) § 3 jedenfalls annähernd genügt. Sehr viel schwieriger aber ist es, einen Ton herzustellen, bei dem der zeitliche Verlauf des Schalldrucks diese Gleichung befriedigt, da dafür Lautsprecher nicht zu umgehen sind.

Ihre starke Abhängigkeit von der Frequenz ist bekannt. Man kann sie leicht experimentell darstellen, indem man an den Lautsprecher eine Spannung konstanter Amplitude, aber allmählich steigender Frequenz anlegt (vgl. § 5) und die Schalldruckkurve des von ihm ausgesandten Tons oszillographisch aufnimmt. Zu bemerken ist dabei: 1. daß diese Aufnahmen in einem stark gedämpften Raum (alle Wände, Decke und Fußboden mit mehreren Schichten eines stark schallabsorbierenden Stoffes belegt) zu erfolgen haben, damit örtliche Interferenzen ausgeschlossen werden; 2. daß man auf diese Weise nicht die Frequenzabhängigkeit des Lautsprechers allein, sondern diejenige des Lautsprechers plus der Aufnahmeapparat bestimmt. Fig. 24 ist in dieser Weise aufgenommen — der obere Linienzug stellt die Frequenzmarken (§ 5a) dar —; sie zeigt die Frequenzcharakteristik eines elektromagnetischen Trichterlautsprechers alten Types von besonders schlechter Charakteristik. Die viel bessere, aber längst nicht ideale Frequenzcharakteristik eines elektrodynamischen Lautsprechers (Magnavox) ist in der Fig. 25 wiedergegeben. Es wurde bei diesen Aufnahmen sicher gestellt, daß die Lage des Lautsprechers bzw. des Mikrophons in dem gedämpften Raum keine wesentliche Änderung der Charakteristik hervorbrachte.

Aus diesen Aufnahmen geht hervor, daß auch dann, wenn eine in der Amplitude konstante Heulspannung hergestellt wird, es kaum möglich ist, diese in einen in seiner Amplitude konstanten Heulton umzuwandeln. Die große Verzerrung des Heultons, die tatsächlich eintritt, soll durch ein Beispiel illustriert werden. Ein Heulstrom ($f_0 = 660$, $\Delta f = \pm 370$ und $\alpha = 14/\text{sec}$) wurde den Lautsprechern von Fig. 24 und 25 zugeführt und die Druckamplitude in dem erwähnten gedämpften Raum oszillographisch aufgenommen. Es ergab sich Fig. 26 bei Verwendung des elektromagnetischen, Fig. 27 des elektrodynamischen Lautsprechers. Beide, aber besonders die erstere, zeigen starke Schwankungen der Amplitude, wie man sie nach

der Frequenzcharakteristik von Fig. 24 bzw. 25 in dem benutzten Frequenzgebiet auch erwartet.

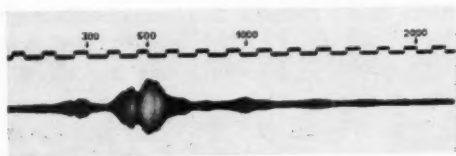


Fig. 24

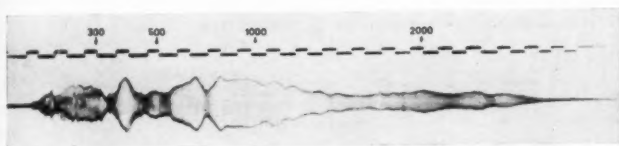


Fig. 25

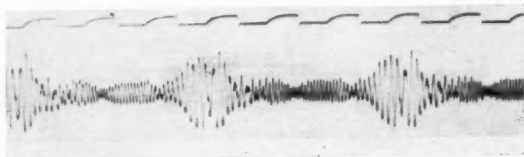


Fig. 26

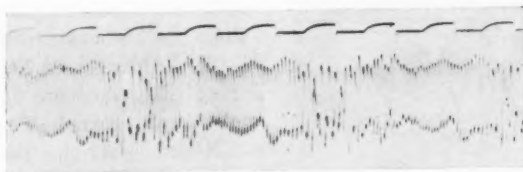


Fig. 27

Durch Verwendung eines besseren Lautsprechers und auch dadurch, daß man ein Frequenzgebiet wählt, in dem die Frequenzabhängigkeit des Lautsprechers möglichst gering ist,

kann man sicherlich eine stärkere Annäherung an einen idealen Heulton — konstante Amplitude bei periodisch veränderter Frequenz — bekommen. Aber man wird im allgemeinen nicht damit rechnen können, daß der Schalldruck eines Heultones die Gl. 1 § 3 befriedigt und somit in ein Frequenzspektrum nach Gl. (3) auflösbar ist. Viel eher werden die Beziehungen von § 4 hier gültig sein.

§ 11. Ergebnisse der Raumaufnahmen

Um einen Vergleich zwischen den mit konstantem Ton gemachten und den Heultonaufnahmen ziehen zu können, wurden zuerst in einem Gang von etwa 50 m Länge, 3,5 m

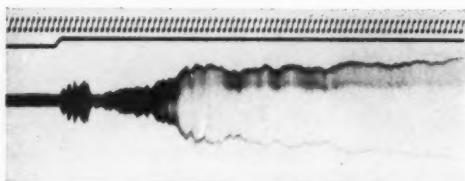


Fig. 28

Breite und 5 m Höhe Anhall-, Nachhall-, Tongruppen- und Durchzugaufnahmen mit konstantem Ton aufgenommen. Typische Beispiele sind in den Figg. 28—34 ($f = \text{etwa } 575/\text{sec}$) gegeben.

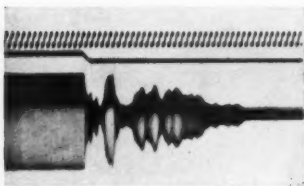


Fig. 29

Die starke Wirkung der örtlichen bzw. zeitlichen Interferenz macht sich in jeder Aufnahme deutlich bemerkbar.

Die Anhall- und Nachhallkurven (Fig. 28 bzw. 29) sind auch nicht angenähert exponentiell im Verlauf. Die Tongruppen von Figg. 30—33, die mit fast, aber nicht genau derselben Frequenz bei derselben Stellung des Senders und des Empfängers aufgenommen wurden, zeigen ganz verschiedene Bilder. Aus Fig. 30 würde man schließen, daß die Gruppe sehr wenig verzerrt, daß aber etwa in der Mitte zwischen zwei

gleichen Gruppen eine stärkere Verzerrung zu sehen ist. Die Gruppe in Fig. 31 zeigt eine deutliche Verzerrung, die in Fig. 32 noch stärker ist. In Fig. 33 ist die Gruppe fast vollständig verzerrt.

Gruppen ein Echo hörbar ist. Fig. 31 deutet auf eine starke Verzerrung und Verbreiterung der Gruppe, aber echofreie Zwischenzeit zwischen den Gruppen hin. Fig. 32 zeigt starke Verzerrung der Gruppen, und in Fig. 33 sind die Gruppen überhaupt nur eben noch zu erkennen; man erwartet ein ziemlich ununterbrochenes Tönen des Raumes. Ganz ähnliche Unterschiede ergeben sich, wenn man solche Aufnahmen mit genau derselben Frequenz, aber an nur wenig voneinander verschiedenen Orten macht.¹⁰⁾ Beim Durchzug des Mikrophons über eine lange Strecke schwankt die Amplitude vom zweibis dreifachen des Mittelwerts bis fast Null (Fig. 34). Dies sind typische Beispiele der Ergebnisse mit konstantem Ton. Es ist kaum möglich, aus solchen Aufnahmen auf die akustischen Eigenschaften eines Raums, wie sie z. B. für die Hörbarkeit der Sprache in Betracht kommen, einen Schluß zu ziehen oder zwei Räume bezüglich dieser akustischen Ergebnisse miteinander zu vergleichen.

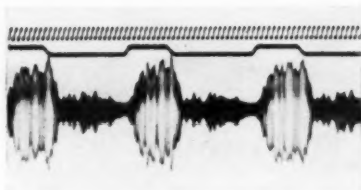


Fig. 30

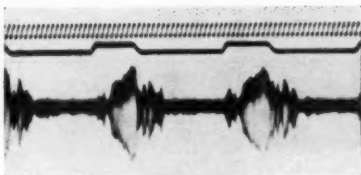


Fig. 31

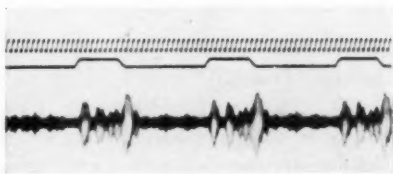


Fig. 32

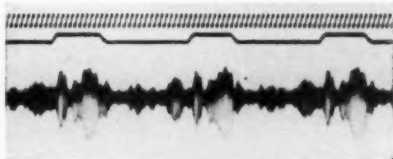


Fig. 33

Es wurde deshalb versucht, wie weit die Verwendung von Heultönen mit verschiedenen Heulbereichen und verschiedenen Heulfrequenzen über die Schwierigkeiten hinweghelfen,

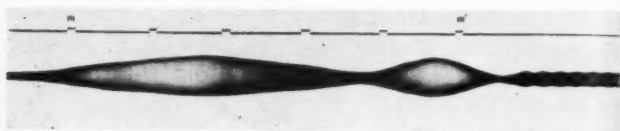


Fig. 34

die bei der Verwendung eines einzigen Tones für die Beurteilung der praktisch wichtigen akustischen Eigenschaften eines Raumes vorliegen.

Versucht wurden folgende Heultöne:

	f_0	Δf	α	$\Delta f/\alpha$
1	580/sec	5/sec	14/sec	0,35
2	510	5	14	0,35
3	510	10	14	0,7
4	580	15	24	0,6
5	580	20	14	1,4
6	580	20	16	1,3
7	580	20	24	0,8
8	538	52	14	3,7
9	570	105	14	7,5
10	615	105	14	7,5
11	645	195	14	14
12	598	202	14	14,5

Von diesen Heultönen lieferten die ersten sechs keine Ergebnisse, die sich von denjenigen bei einem einfachen Ton erheblich unterschieden hätten. Erheblich besser war schon

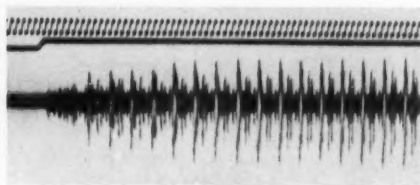


Fig. 35

7, bei dem zwar Δf klein, aber α groß war, und am besten erwies sich der Heulton 12, bei dem sowohl der Heulbereich $2 \cdot \Delta f$ als die Heulfrequenz α verhältnismäßig große

Wert
Figg.
den
einen
tonen
Figg.
ist f
schw
aufna
jeden
was c
mäßi
lich
Grup
viele
Refle
Dure
gur
groß
schen
den
sie
nicht
die
einze
man
so e

die
E. M
groß

Werte hatten. Die damit gemachten Aufnahmen sind in den Figg. 35—38 wiedergegeben. Betrachtet man in Fig. 35 und 36 den zeitlichen Verlauf der Maximalwerte, so geben die beiden einen, wenn auch nicht ganz exponentiellen, so doch monotonen Anstieg bzw. Abfall; der lokale Einfluß, der sich in den Figg. 28 und 29 zeigte, ist fast vollkommen verschwunden. Die Gruppenaufnahme Fig. 37 zeigt jedenfalls ungefähr das, was das Ohr hört, nämlich mäßig verzerrte, aber deutlich sich hervorhebende Gruppen und dazwischen viele, aber sehr schwache Reflexionen. Aus der Durchzugsaufnahme Figur 38 sind die sehr großen Unterschiede zwischen der Amplitude an den einzelnen Stellen, wie sie die Fig. 34 besitzt, nicht mehr vorhanden; die Maximalwerte an den einzelnen Stellen sind nur sehr wenig verschieden. Machte man dieselben Aufnahmen an verschiedenen Stellen des Raumes, so ergaben sich nur ganz geringe Unterschiede.

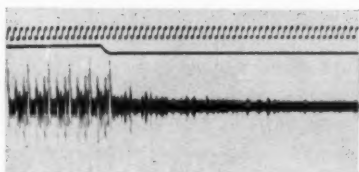


Fig. 36

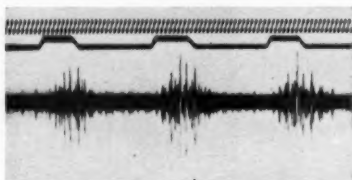


Fig. 37



Fig. 38

Der Einfluß des Heulbereiches und der Heulfrequenz auf die Elimination von störenden Interferenzen ist schon von E. Meyer¹⁴⁾ untersucht worden. Er fand ein verhältnismäßig großes Δf und kleines α besonders günstig.

Für die Zahl der Komponenten, die in der spektralen Zerlegung auftreten, kommt es nur an auf das Verhältnis $\Delta f/\alpha$ (§ 3); dieses Verhältnis wird man also unter allen Umständen möglichst groß machen. Für die praktische Brauchbarkeit des Heultones in dem eben angegebenen Sinn sind aber bei

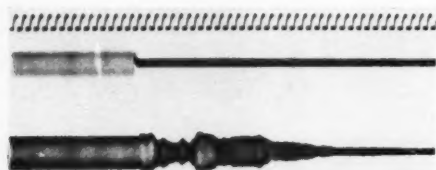


Fig. 39

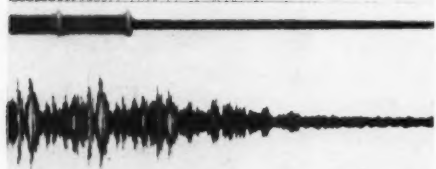


Fig. 40

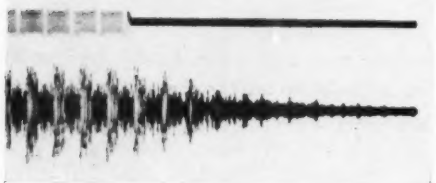


Fig. 41

Figg. 39—41

einem bestimmten $\Delta f/\alpha$ die absoluten Werte von Δf und α nicht unwesentlich. Um das zu zeigen, wurden in einem Raum (Kistenkeller) mittlerer Dämpfung der Nachhall aufgenommen, einmal mit einem konstanten Ton von einer Frequenz von etwa 500/sec (Fig. 39), dann mit einem Heulton ($f_0 = 500$, $\Delta f = \pm 100$, $\alpha = 5/\text{sec}$, $\Delta f/\alpha = 20$) = Fig. 40 und endlich mit einem Heulton ($f_0 = 500$, $\Delta f = \pm 300$, $\alpha = 15/\text{sec}$,

$\Delta f/\alpha = 20$) = Fig. 41. Obwohl also bei beiden Heultönen $\Delta f/\alpha$ denselben Wert hatte, entspricht der zweite mit dem großen Δf und großem α seinem Zweck besser als der erste.

Zusammenfassung

Die Arbeit bezieht sich auf einen sogenannten Heulsummer, d. h. eine Schallquelle, deren Frequenz bei annähernd gleichbleibender Amplitude sich periodisch ändert.

Im ersten Abschnitt wird außer der bekannten Form des Heulsummers mit zwei Hochfrequenzkreisen ein Niederfrequenz-Heulsummer beschrieben. Er besteht aus einem Röhrengenerator, dessen Schwingungskreis Eisenkernspulen enthält. Durch eine periodische Magnetisierung der Eisenkerne wird die Induktivität der Spulen und damit die Frequenz des Röhrengenerators periodisch geändert.

Im zweiten Abschnitt wird zuerst die spektrale Zerlegung des Heultons nach der theoretischen Methode von J. R. Carson wiedergegeben und erweitert. Dann wird eine experimentelle Methode beschrieben, die eine oszillographische Analyse von zusammengesetzten Schwingungen, insbesondere auch von Heulschwingungen, gestattet.

Im vierten Abschnitt wird die Wirkung einer EMK., die den Charakter eines Heultones hat, auf einen Schwingungskreis experimentell untersucht.

Im fünften Abschnitt handelt es sich um die Verwendung des Heultones für raumakustische Untersuchungen.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München ausgeführt. Hrn. Prof. Dr. J. Zenneck bin ich sowohl für die Anregung hierzu, wie auch für die ständige eingehende Beratung zu großem Danke verpflichtet. Bei der Arbeit wurden vielfach Apparate benutzt, die die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft dem Institut zur Verfügung gestellt hatte; auch ihr sei bester Dank ausgesprochen.

Besonderen Dank schulde ich ferner dem Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA., das mir durch Zuwendung der Proctor Travelling Fellowship in Physics das Studium in Deutschland ermöglicht hat.

Literatur

- 1) J. R. Carson, *Proc. Inst. Radio. Eng.* **10**. S. 57. 1922.
- 2) Balth. van der Pol, *Tijdschr. Nederl. Radiogen.* **4**. S. 57. 1929.
- 3) H. Salinger, *Elektr. Nachr.-Techn.* **6**. S. 294. 1929.
- 4) P. Just, *Schalltechnik* **2**. S. 5. 1929.
- 5) E. A. Eckhardt u. V. L. Chrisler, *Scient. Pap. Bureau of Standards* **21**. S. 37. 1926.
- 6) M. Grützmacher, *Ztschr. f. techn. Phys.* **10**. S. 570. 1929; *Elektr. Nachr.-Techn.* **4**. S. 533. 1927.
- 7) C. Guy Suits, *Proc. Inst. Radio. Eng.* **18**. S. 178. 1930.
- 8) E. Scharstein, *Ann. d. Phys.* [5] **2**. S. 163. 1929.
- 9) W. Schindelin, *Ann. d. Phys.* [5] **2**. S. 129. 1929.
- 10) W. Kuntze, *Ann. d. Phys.* [5] **4**. S. 1058. 1930.
- 11) W. Linck, *Ann. d. Phys.* [5] **4**. S. 1017. 1930.
- 12) E. Gerlach, *Ztschr. f. techn. Phys.* **8**. S. 515. 1927.
- 13) E. Meyer u. P. Just, *Elektr. Nachr.-Techn.* **5**. S. 293. 1930.
- 14) E. Meyer, *Ztschr. f. techn. Phys.* **11**. S. 253. 1930.
- 15) E. Meyer, *Ztschr. d. Ver. d. Ing.* **74**. S. 273. 1930.
- 16) M. J. O. Strutt, *Elektr. Nachr.-Techn.* **7**. S. 280. 1930.

(Eingegangen 9. Juni 1931)

Beugung
fahren
die F
einer
hat J
gung
gabe
brauc
I
bei d
nur a
exper
dünn
einwa
nung
meter
mit
W. v

und
mon
Davo
Gege
An

***Fresnelsche Beugungserscheinungen;
Interferenzen hoher Ordnungszahl***

Von Wilhelm Müller

(Gekürzte Frankfurter Dissertation)

(Mit 10 Figuren)

1. Einleitung

Ausgehend von der Absicht, durch die Ausmessung von Beugungsbildern an zylindrischen Drähten ein optisches Verfahren zur Dickenbestimmung derselben auszubilden, wurden die Fresnelschen Beugungserscheinungen an dünnen Drähten einer näheren Untersuchung unterzogen. In derselben Absicht hat J. Runge (1) durch Verwendung Fraunhoferscher Beugungserscheinungen ein Mikrometer konstruiert, das nach Angabe der Verfasserin für Drahtdurchmesser von $10-80\ \mu$ brauchbare Werte liefert.

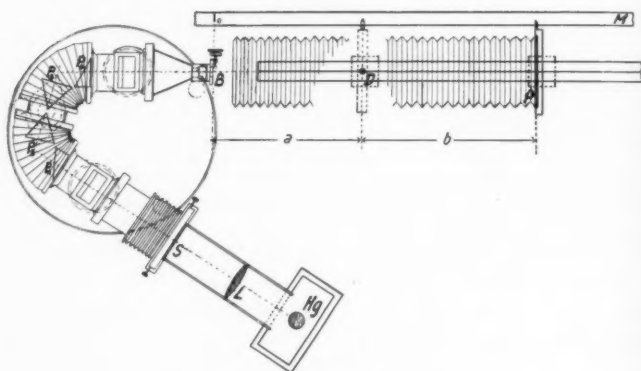
Bei der Verfolgung des genannten Zieles zeigten sich jedoch bei dünnen Drähten Erscheinungen, die in der Literatur (2) bisher nur andeutungsweise behandelt sind und deshalb eine genauere experimentelle Untersuchung der Beugungserscheinungen an dünnen Drähten rechtfertigen. Besonderer Wert wurde auf einwandfreie photographische Bilder der Beugungserscheinungen und auf ihre Auswertung mit einem Registrierphotometer gelegt. Die experimentellen Ergebnisse wurden sodann mit theoretischen Untersuchungen von Fresnel und von W. v. Ignatowsky verglichen.

2. Versuchsanordnung

Die Versuchsanordnung für Fresnelsche Beugung ist an und für sich sehr einfach. Ein möglichst feiner Spalt, der mit monochromatischem Licht beleuchtet wird, dient als Lichtquelle. Davor befindet sich in endlicher Entfernung der beugende Gegenstand, dessen Schatten in einem endlichen Abstand auf

einem Schirm aufgefangen werden kann. Lichtstärker beobachtet man in Durchsicht gegen eine Mattscheibe, noch besser mit einer scharfen Lupe, in deren Objektebene die Streifen gesehen werden. So sind leicht etwa fünf Streifen auf jeder Seite zu erhalten. Will man aber weiter kommen, so sind alle Teile der Apparatur aufs äußerste zu verfeinern. Es gelang bis zu 100 Streifen zu zählen.

Die endgültige Versuchsanordnung zeigt Fig. 1. Hg ist eine Uviolglasquecksilberlampe (Schott & Gen., Jena), die durch die Linse *L* auf den Vorspalt *S* (Spektroskopspalt) eines lichtstarken



Die Apparatur

Fig. 1

Spektrographen nach Zenneck (3) abgebildet wurde. Von dem Hg-Spektrum wurde eine beliebige Linie (meist die grüne) auf den Präzisionsspalt *B* (Beugungsspalt) geworfen. Im Abstand *a* von ihm befand sich auf einer langen optischen Bank verschiebbar der Draht *D*; in *P*, ebenfalls verschiebbar, im Abstand *b* von *D* der Schirm bzw. die Lupe oder die photographische Platte.

Die Einstellung — es kommt auf größtmögliche Parallelität von Spalt *B* und Draht *D* an — geschieht bei geöffnetem Spalt. Der Draht ist in einem Rahmen eingespannt, in dem er leicht in der zur optischen Bank senkrechten Ebene justiert werden kann. Je besser die Parallelität ist, desto mehr Streifen erscheinen und desto schärfer werden sie. Macht man nun den

Spalt sehr fein, so nimmt die Anzahl der wahrnehmbaren Streifen immer mehr zu, dieselben werden jedoch um so lichtschwächer.

Ursprünglich wurden die Streifen mit dem Kathetometer ausgemessen. Bei größeren Abständen — Lichtweg ($a + b$) bis 8,5 m — wird die Erscheinung so lichtschwach, daß man zur photographischen Aufnahme schreiten muß. In diesem Fall wurde bei P die Kassette mit einer für Grün hochempfindlichen Platte angebracht. Durch lange Bälge war die Platte gegen diffuses Seitenlicht geschützt. Die Belichtungszeiten lagen meist zwischen $\frac{1}{2}$ —3 Std., doch kamen auch Belichtungen bis zu 12 Std. vor.

Eine weitere Schwierigkeit bringen die starken Intensitätsunterschiede, die oft weit über den geradlinigen Teil der Schwärzungskurve der photographischen Platte hinausgehen, zum Beispiel der Unterschied zwischen den inneren und äußeren Streifen bei der Beugung am Draht. Weiche Entwicklung ist in diesem Fall vorteilhaft. Mit dem Komparator sind zwar härtere Platten leichter auszumessen, für die Photometrie dagegen müssen sie recht zart entwickelt sein.

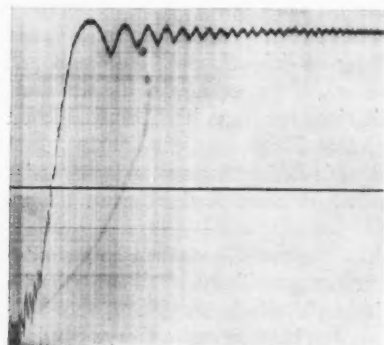
3. Die photometrische Auswertung

Bei genauerer Betrachtung der zunächst vorliegenden Aufnahmen zeigte es sich, daß die Interferenzen bald enger und scharf, bald weiter und verwaschen waren, und daß dazwischen Nebenmaxima in regelmäßiger Folge schwebungsartig auftraten. Um diese Erscheinung genauer zu verfolgen, mußte der Weg der direkten Betrachtung der Beugungsbilder verlassen werden, da er ja nur die Extremwerte bringt. An seine Stelle trat einmal die möglichste Vervollkommnung der photographischen Aufnahmen selbst, sodann aber ihre photometrische Auswertung.¹⁾

Bei der Beugung an einer Halbebene (Fig. 2 und Fig. 8a) zeigt die Photometerkurve normalen, ungestörten Verlauf. Die winzigen Schwankungen sind Kornzacken, die durch die einzelnen Bromsilberkörner der Emulsion der Aufnahmeplatte her-

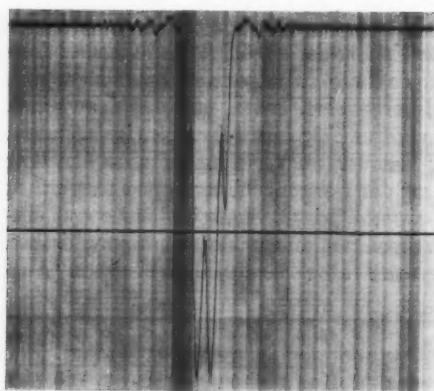
1) Die Photometrierung wurde im Sommer 1927 im Physikalischen Staatsinstitut der Universität Hamburg vorgenommen. Hrn. Prof. P. P. Koch sowie seinem Assistenten Hrn. Dr. Kuhlmann sei auch an dieser Stelle aufrichtig gedankt.

vorgerufen sind. Das gleiche gilt von den Beugungsstreifen an Schneide und Rücken eines Rasiermessers. Hierbei findet sich die von Arkadiew (4) gefundene Unabhängigkeit der Beugungsfigur von dem Krümmungsradius der beugenden Kante bestätigt.



Halbebene
(Registrierphotometerkurve)

Fig. 2



Silberband $0,5 \times 0,03$ mm ($a = 75$ cm, $b = 75$ cm)

Fig. 3

man die Schwebungen praktisch überhaupt nicht mehr beobachten kann, da sie bei zu hohen Ordnungszahlen der Inter-

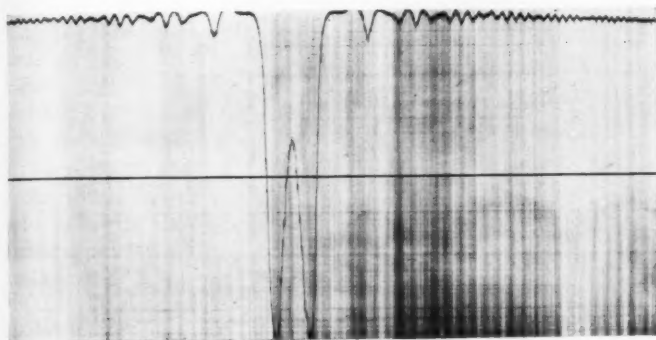
Bei Aufnahmen an Zylindern oder schmalen Bändern erhält man jedoch unter bestimmten Größenverhältnissen Interferenzsysteme bzw. Photometerkurven, die einen Schwebungscharakter aufweisen (vgl. Fig. 3 und 4 bzw. Fig. 8c und d), das heißt ihre Deutlichkeit wechselt periodisch.

Verringert man bei sonst gleichbleibenden Abstandsverhältnissen den Durchmesser des Drahtes, so rückt die Stelle der ersten Verwaschung (erstes Schwebungsminimum der Photometerkurve) weiter nach außen (vgl. Fig. 5 und Fig. 8e). Bei sehr dünnen Drähten hat dies zur Folge, daß

wei
fluß
des
die

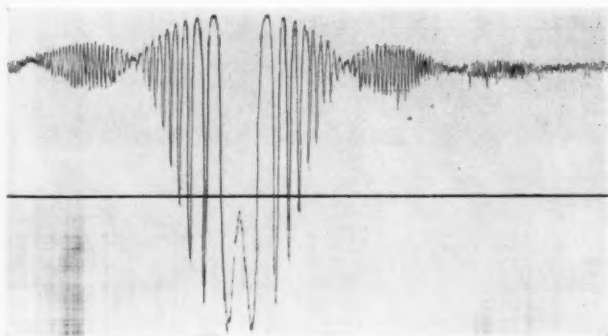
ferenzen liegen; zum Beispiel fällt die erste Verwaschung für 10μ Drähte etwa auf den 30. bis 40. Streifen (Fig. 6 und Fig. 8f).

Geht man andererseits zu dickeren Drähten als 0,2 mm Durchmesser über, so rückt die Stelle der ersten Verwaschung



Stahldraht ($a = 9$ cm, $b = 84$ cm)

Fig. 4

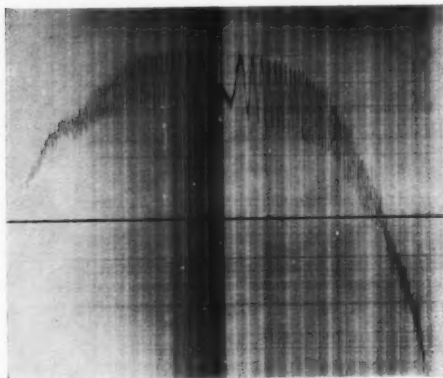


Silberband $0,138 \times 0,0028$ mm ($a = 75$ cm, $b = 75$ cm)

Fig. 5

weiter nach innen, dabei nimmt aber auch gleichzeitig der Einfluß der Störung ab, so daß die Kurven mehr den Charakter des Interferenzsystems bei der Halbebene zeigen, auf das sich die Störung nur noch durch kleinere Zacken überlagert. Be-

sonders zu beachten ist das Auftreten mehrerer kleiner Maxima und Minima auf dem steilen Intensitätsabfall zwischen dem

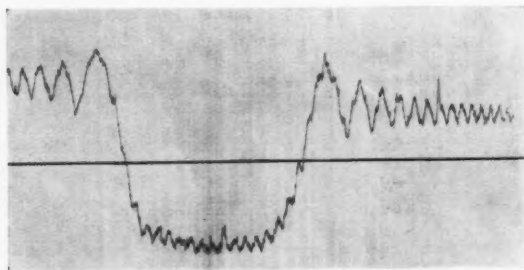


Platindraht $10\ \mu$

Fig. 6

geometrischen Schatten und dem ersten äußeren Streifen (vgl. Fig. 7 und Fig. 8b). Aus dem symmetrischen Auftreten dieser Zacken läßt sich feststellen, daß es sich hierbei nicht um die bei der Halbebene erwähnten Kornzacken handelt.

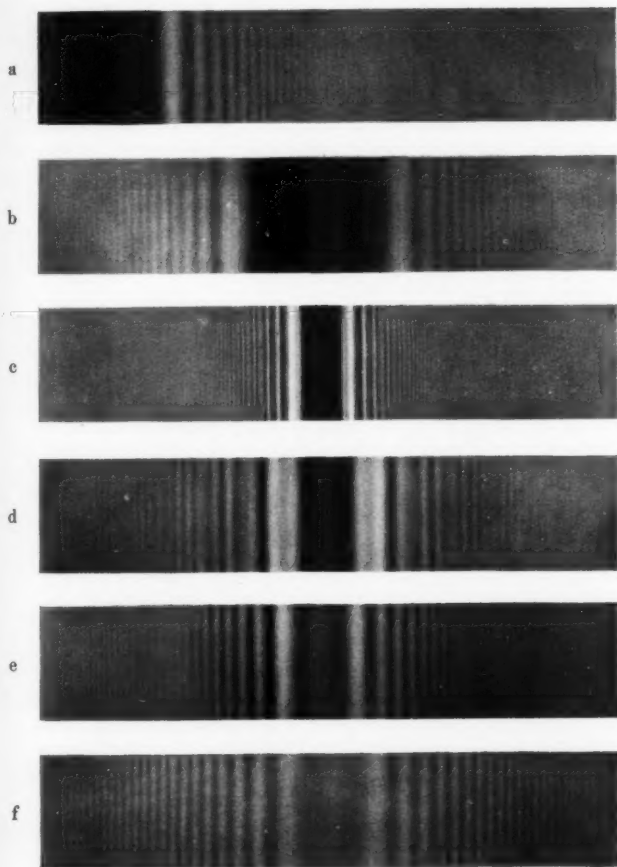
Die gleiche Schwebungserscheinung wie an metallischen Drähten (Ag, Cu, Fe, Pt usw.) von kreisförmigem Querschnitt und an den metallischen Silberbändchen, deren Dicke nur den 20. bis



Kupferdraht 1 mm ($a = 15\text{ mm}$, $b = 74,5\text{ mm}$)

Fig. 7

50. Teil ihrer Breite betrug, zeigen die Aufnahmen am dielektrischen Zylinder (Piceinfaden) und am dielektrischen Band (schwarzer Papierstreifen). Auch bei Benutzung verschiedener Wellenlängen bleibt der Charakter der Schwebung erhalten.



a = Halbebene
 b = Kupferdraht 1,0 mm
 c = Silberband 0,5 mm

d = Eisendraht 0,25 mm
 e = Silberband 0,138 mm
 f = Platindraht 0,01 mm

Fig. 8

Ferner wurden einige orientierende Versuche mit polarisiertem Licht gemacht. Dabei wurde festgestellt, daß die Störung bei parallel zum Draht polarisiertem Licht enger liegt im Vergleich zu der Aufnahme mit senkrecht zum Draht polarisiertem Licht.

4. Theoretische Erklärung der Ergebnisse

Die beste, streng genommen allerdings nur qualitative Übersicht über die Fresnelschen Beugungserscheinungen ergibt eine Diskussion an Hand der Cornuschen Spirale (z. B. Drude, Optik 3. Aufl. Leipzig 1912, S. 181ff.). Die Fresnelschen Integrale sind für jeden bestimmten Wert des Parameters v als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes E aufgetragen. Bei kontinuierlicher Änderung des v beschreibt dann E eine Doppelspirale (vgl. Fig. 9), die sich in unendlich vielen, immer enger werdenden Windungen um die Punkte $F(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ und $F'(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ herumschlängelt.

Für den schmalen Schirm wird die Intensität proportional

$$J = C^2 + S^2,$$

wo

$$C = \int_{-\infty}^{v_1} \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv + \int_{v_2}^{+\infty} \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv,$$

$$S = \int_{-\infty}^{v_1} \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv + \int_{v_2}^{+\infty} \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv$$

und

$$v_1 - v_2 = d \sqrt{\frac{2(a+b)}{a b \lambda}} = \text{const.}$$

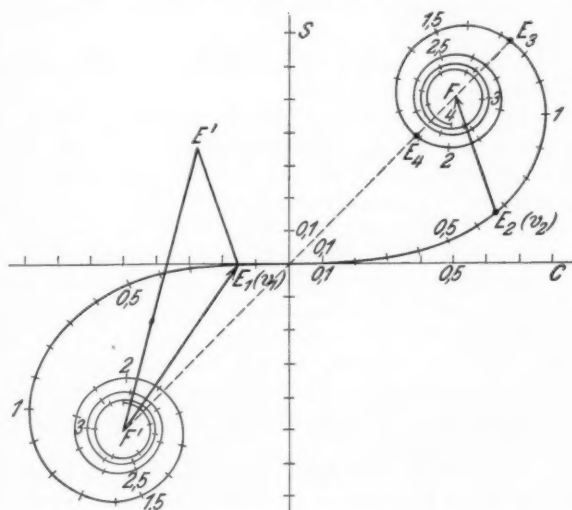
ist, also proportional dem Quadrat der Strecke $F'E'$, welche man durch geometrische Addition der Strecken $F'E_1$ und $E_2F = E_1E'$ erhält. Dabei ist wieder a der Abstand vom Spalt bis zum Draht, b der Abstand vom Draht bis zum Schirm, d der Drahtdurchmesser und λ die Wellenlänge des benutzten Lichtes.

Bei gleichem a , b und λ unterscheiden wir drei Fälle.

1. Der Schirm ist breit (bei den hier benutzten Abständen > 1 mm), d. h. $v_2 - v_1 \gg 2$.

Schon für die Mitte des Beugungsbildes ($v_2 = -v_1$) liegen E_1 und E_2 weit in den beiden Windungen der Spiralen. $F'E_1$ und E_2F sind parallel und gleichgerichtet, so daß die Mitte des Beugungsbildes immer hell bleibt, doch nimmt ihre Intensität mit wachsender Drahtdicke ab, da $F'E_1$ bzw. E_2F um so kleiner werden, je mehr E_1 sich F' bzw. E_2 sich F nähert. Da das Beugungsbild symmetrisch ist, betrachten wir nur die Punkte $v_2 \cong \frac{v_2 - v_1}{2}$. Dabei läuft $F'E_1$ im Uhrzeigersinn und

immer schneller wachsend aus dem um F' geschlagenen Teil der Spiralen heraus, während $E_2 F$ im entgegengesetzten Sinne zwar immer schneller umlaufend aber immer langsamer wachsend in die Windungen um F hineinkriecht. Da beide Vektoren in entgegengesetztem Sinn laufen, entstehen Maxima und Minima, die durch den stärkeren Vektor $F' E_1$ zu größeren Intensitäten gehoben werden, während die Schwankung, durch den ab-



Cornusche Spirale

Fig. 9

nehmenden Vektor $E_2 F$ geringer werdend, sich überlagert. Bei $v_1 = 0$ überschreitet E' die Grenze des geometrischen Schattens. $F' E_1$ beherrscht das Kurvenbild als Grundschwingung (genau wie bei der Halbebene) und führt, während E_1 nun in entgegengesetztem Umlaufsinne sich F nähert, eine pendelnde Bewegung aus, über die E_2 zwar im gleichen Sinne aber immer schneller laufend als Oberschwingung sich überlagert. Dadurch entstehen die gezeigten Nebenmaxima und -minima der äußeren Streifen.

2. Bei einem Schirm von mittlerer Breite ist $v_2 - v_1$ von der Größenordnung von 2.

$F' E_1$ und $E_2 F$ sind größer wie im ersten Falle, die Intensität in der Mitte des Beugungsbildes ist bedeutend gestiegen. $F' E_1$ verläßt schnell wachsend die Windungen der Spirale, die inneren Streifen werden heller und nehmen rasch an Zahl ab (nur noch ein Streifen auf jeder Seite). $E_2 F$, der sich noch in den äußeren Windungen befindet, hat an Einfluß gewonnen und gibt dem Kurvenbild immer mehr den Charakter einer Schwebung, da er $F' E_1$ voraneilend den resultierenden Vektor $F' E'$ bald verstärkt, bald schwächt.

3. Bei einem schmalen Schirm rücken E_1 und E_2 sehr nahe zusammen, da $v_2 - v_1 \ll 1$ ist.

In der Mitte des Beugungsbildes liegen E_1 und E_2 nahe bei 0, die Vektoren $F' E_1$ und $E_2 F$ sind groß und ihre Addition ergibt eine große Intensität, die bis zur Schattengrenze nur wenig abnimmt. Deshalb sind die Beugungsbilder an sehr dünnen Drähten in der Mitte sehr hell und gehen ohne innere Streifen mit wenig geschwächter Intensität in das äußere Gebiet über.

a) Für $v_2 - v_1 \sim 0,6$ ist, wenn E_1 sein Maximum erreicht (bei E_3 in Fig. 9), E_2 in E_4 angelangt; die Vektoren sind parallel und gleichgerichtet und es findet eine Verstärkung der ersten Streifen statt (im Vergleich zu den Maxima und Minima bei der Halbebene). Dies ist die relativ größte überhaupt vorkommende Intensität. $E_2 F$ hat noch mehr an Einfluß gewonnen und der Schwebungscharakter wird immer stärker.

b) Für $v_2 - v_1 \sim 0,1$ liegen E_1 und E_2 sehr nahe beisammen. Der Einfluß von $E_2 F$ ist am stärksten geworden, indem er die Maxima und Minima von $F' E_1$ bald verstärkt, bald schwächt, da er durch seine immer noch größere Umlaufszahl $F' E_1$ bald gleich — bald entgegengesetzt gerichtet ist.

5. Berechnung der Intensitätskurven

Für den genaueren Vergleich der Rechnung mit den Versuchsergebnissen wurde die Intensitätsverteilung in den Beugungsstreifen rechnerisch verfolgt. Durch geeignete Unterteilung der Integrationsgrenzen erhält man die zur Berechnung geeignete Endformel

$$J = (1 + C_1 - C_2)^2 + (1 + S_1 - S_2)^2,$$

wobei C_1 und C_2 bzw. S_1 und S_2 die Fresnelschen Integrale zwischen den Grenzen 0 und v_1 bzw. v_2 bezeichnen. Die nach

dieser Formel berechneten Kurven sind in der Fig. 10 g, h, i und m, n zusammengestellt.

Zum Vergleich mit dieser einfacheren Rechnung nach Fresnel wurden die Arbeiten von W. v. Ignatowsky (5)

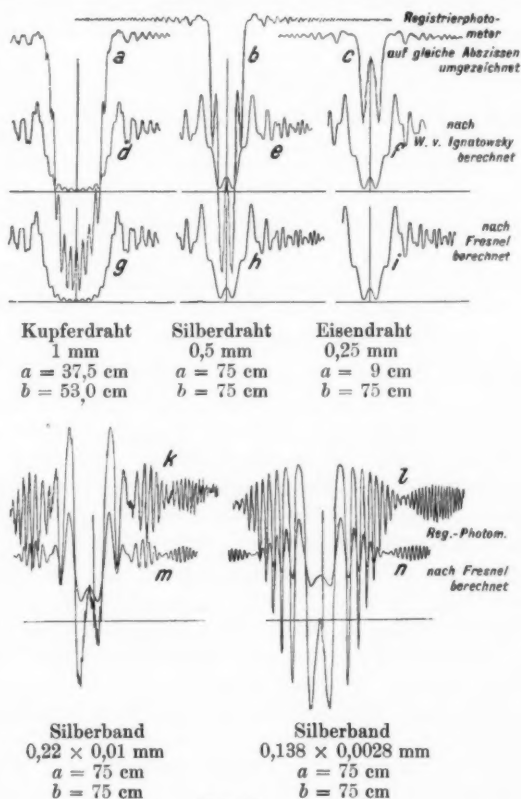


Fig. 10

herangezogen. Auf Grund des Poyntingschen Satzes erhält Ignatowsky aus den Maxwell'schen Gleichungen den Mittelwert des Energiestromes \mathcal{E} , welcher durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit fließt,

$$\mathcal{E} \sim \mathcal{E}' 1 + \frac{M^2 + N^2}{2} (M + N).$$

Hierbei ist

$$M = C(m - q) + C(m + q),$$

$$N = S(m - q) + S(m + q),$$

wo C und S wieder die Fresnelschen Integrale zwischen den Grenzen 0 bis $m - q$ bzw. $m + q$ bedeuten, endlich

$$m = g \sqrt{\frac{2r_1}{\lambda R s}},$$

$$q = d \sqrt{\frac{2s}{\lambda R r_1}},$$

r_1 die Entfernung vom Aufpunkt zum Spalt,
 s der Abstand des Drahtes vom Spalt,
 g der Drahtradius,
 R der Abstand vom Aufpunkt zur Drahtachse,
 d der Abstand vom Aufpunkt zur X-Achse und
 λ die Wellenlänge des Lichtes ist.

Nach dieser Formel wurden die Kurven Fig. 10d, e, f berechnet.

Ferner wurden in Fig. 10a, b, c und k, l die entsprechenden Photometerkurven in geeigneter Vergrößerung darüber eingezeichnet. Dabei sei besonders darauf hingewiesen, daß die Photometerkurven keine reinen Intensitätskurven sind. Da die Photometerempfindlichkeit nicht linear ist, sind die Ordinaten verzerrt und nur die Abszissen vergleichbar.

Wie man sieht, besteht nur bei dem Draht von 1 mm Durchmesser (Fig. 10a, d, g) Übereinstimmung der Kurven. Ebenso ergaben noch dickere Drähte stets richtige Werte. Für Drähte von 0,5 mm und noch mehr für solche von 0,25 mm Durchmesser weichen sowohl die nach Ignatowsky als auch die nach Fresnel berechneten Kurven von der Photometerkurve erheblich ab, doch scheint die Theorie von W. v. Ignatowsky eine — wenn auch nur wenig — bessere Annäherung zu bringen. Für sehr dünne Drähte zeigen die beiden letzten Kurven (Fig. 10l, n), daß die Abweichungen immer stärker werden und zwar rücken hierbei die Schwebungen im Vergleich mit den theoretisch berechneten Kurven immer weiter nach außen.

Vorliegende Arbeit wurde in den Jahren 1924—1927 im Physikalischen Institut der Universität Frankfurt a. M. ausgeführt.

Hrn. Geh. Rat Prof. Dr. R. Wachsmuth, der die Anregung zu dieser Arbeit gab, schulde ich für stete Anteilnahme und liebenswürdige Förderung, Hr. Prof. Dr. K. W. Meißner für vielfache Unterstützung und freundliche Beratung aufrichtigen Dank.

Literatur

- 1) J. Runge, Ein optisches Mikrometer, Ztschr. f. techn. Phys. 9. S. 484. 1928.
- 2) E. v. Lommel, Abh. d. bayr. Akad. 15. S. 531. 1886.
- 3) J. Zenneck, Phys. Ztschr. 12. S. 1199. 1911.
- 4) W. Arkadiew, Phys. Ztschr. 14. S. 832. 1913.
- 5) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 23. S. 875. 1907.

(Eingegangen 12. Juni 1931.)

Die Reibung, Wärmeleitung und Diffusion in Gasmischungen

XIX. Temperaturkoeffizient, Zahlwert und Vorausberechnung der Gasreibung aus chemischer Formel und kritischer Temperatur

Von Max Trautz

(Mitteilung aus dem Physikalisch-Chemischen Institut der Universität
Heidelberg)

1. Fragestellungen

Die *idealen Gase* haben zahlreiche individuelle *temperaturabhängige Eigenschaftsgrößen*, z. B. die Molwärme C_v , Reibungskonstante η , Wärmeleitzahl κ , Dielektrizitätskonstante D und optische Mittelwertskonstanten (Brechungsindizes, Absorptions- und Zerstreuungskonstanten). Für die Temperaturfunktion aller dieser Konstanten eine gemeinsame und zugleich einigermaßen einfache Grundlage der Vorausberechnung zu suchen, scheint mir noch kaum versucht worden zu sein; doch bestände starker Bedarf danach, wissenschaftlich wie praktisch.

Wendet man seinen Blick dagegen auf andere Zustände, als die idealen Gase, so tritt die Betrachtungsweise der großen holländischen Schule, die an die Namen vor allem von van der Waals und von van Laar, anknüpft, überwältigend in den Vordergrund. Und dies, trotzdem ja das Übereinstimmungstheorem der Erfahrung für sich allein nicht genügt. Hinzu trat die Erforschung der Gitter und die dabei gewinnbare Systematik. Und es scheint, daß beides die Idee stärkte, als ob einerseits das Übereinstimmungstheorem und dergleichen bei idealen Gasen schweige oder wenigstens dem Gasgesetz nichts weiter hinzufüge, der Molekelbau aber nur im Gitter rein hervortrete. Lassen wir jetzt letzteren beiseite und sehen wir nur die Welt der kritischen Größen und ihrer Funktionen an.

Denn seitdem mir die glatten Beziehungen der kritischen Temperatur zum Molgewicht und zur Molwärme aufgefallen waren, haben sie sich an der Gasreibung mit noch größerem Erfolg weiter behandeln lassen.

Man kann dabei entweder, was wir einstweilen noch wenig ausbauen, nach einfachen Beziehungen aller drei kritischen Größen suchen, und mithin eine Art Kontinuumbetrachtung versuchen; denn wegen der durchaus unübersehbaren Polymerisationserscheinungen beim kritischen Zustand erscheint für die gerade interessanten „nicht normalen“ Stoffe eine atomistische Betrachtungsweise hier kaum aussichtsreich.

Oder man kann, und dies ist der Weg, den wir einschlugen, sich nur der kritischen Temperatur bedienen. Gewissermaßen mit der Auffassung, daß diese Temperatur als eine von Natur extrem ausgezeichnete Größe, bereits im einzelnen Gasmolekül virtuell vorbestimmt wäre, und also bei größerer Vergesellschaftung der Molekeln dieselbe bliebe. Dann kann es sich auch nicht mehr um Polymerisationsfragen, sondern nur noch um eine Art „Iso“-merisationsfragen handeln, also nicht mehr um druck- oder volumenabhängiges. Das ist also eine Art allgemeines, leitendes Prinzip, nach dem wir in diesen Dingen jetzt zu verfahren versuchen.

Unsere Unterlage an vergleichbaren Messungszahlen für die Gasreibung ist heute breit genug, um induktiv daraus abzuleiten, wie man bei Kenntnis der chemischen Formel eines Stoffs und seiner kritischen Temperatur seine Reibungskonstante η ermittelt, und zwar für alle in Betracht kommenden Temperaturen.

Unser induktives Verfahren gleicht in manchem dem, das die Herren Walden und V. M. Goldschmidt mit so großen Erfolgen virtuos handhabten.

Die chemische Formel liefert Molgewicht M , Atomzahl Z und konstitutive Besonderheiten; die kritische Temperatur T_k , wo nicht gemessen, läßt sich behelfsmäßig aus dem fast stets bekannten Siedepunkt T_s bei Normaldruck zu $T_k = 1,56 \cdot T_s$ bestimmen.

Die im folgenden beschriebenen Mittel zur η -Berechnung aus diesen Daten zeigen sich sehr einfach. Sie liefern ohne η -Messungen eine Genauigkeit von wenigen Prozenten, bei Vor-

liegen von nur einem gemessenen η nicht selten eine von Promillen, innerhalb der Fehlergrenze.

Unsicher oder unmöglich bleibt die Auskunft einstweilen bei solchen Dämpfen, worin Elemente enthalten sind, an denen oder an deren Verbindungen man noch keine η gemessen hat (vgl. aber S. 210 ff.).

Der Fall liegt in vieler Hinsicht ähnlich wie bei Gasmolwärmen. Additivitäten und Ganzzahlen treten hier wie dort auf; ebenso zentrale Bedeutung der T_k .

Von dem Nutzen dieser Vorarbeiten für die Gastheorie (der Impulsübertragung und Impulszersplitterung), für die Vorausbestimmung der (namentlich technisch benötigten) Gaswärmeleitzahlen, und auch für chemisch-kinetische Fragen brauchen wir wohl nicht zu sprechen.

Von sehr allgemeiner Bedeutung scheint uns die Fruchtbarkeit der bei diesem Anlaß entwickelten Vorstellung, es spanne sich das Feld der thermischen Stoffvariablen (im oben angegebenen allgemeinsten Sinn) — zum mindesten das der bei „Stoß“ sich betätigenden Eigenschaftsgrößen — idealer Gase so zwischen ihre (ideal extrapolierten) Grenzwerte bei $T=0$ und bei $T=\infty$, als ob sie einem Gleichgewicht einer Mischung zwischen diesen beiden Grenzformen entspräche, das bei T_k allgemein gleichviel von beiden enthielte, hier also die Gleichgewichtskonstante (des „Iso“merisationsvorgangs) Eins habe. Angewendet haben wir den Gedanken in vorliegender Arbeit erst auf η ; in Arbeit genommen haben wir ihn aber auch für die anderen thermischen, d. h. temperaturabhängigen Gaseigenschaften.

Für die anderen Aggregatzustände wird der Gedanke immerhin genäherte, aber keine strengen Ergebnisse mehr erwarten lassen. Es erscheint nicht unmöglich, daß diese letztere genäherte Geltung dann mit der des Übereinstimmungstheorems mehr oder minder zusammenfällt.

2. Das Ausgangsmaterial

Alle uns zugänglichen η -Werte wurden gegen T graphisch aufgetragen und kritisch ausgeglichen. (Diese Tafeln folgen in einer demnächst erscheinenden Abhandlung.)

Bei unseren immerhin zahlreichen eigenen Messungen konnten wir das am sichersten tun, schon weil wir da über Gleichheit der Methode und der benützten Korrekturen ein sicheres Urteil haben. Dagegen blieb bei vielen Zahlen fremder Forscher ungewiß, welche Korrekturen und zum Teil auch, welche Eichwerte sie benützt haben. Merkwürdig wird solches bei sehr unidealen Dämpfen, aber am allgemeinen Bild ändert es nichts.

Aus den η - T -Kurven wurden dann die $d\eta/dT$ entnommen, ebenfalls graphisch gegen T aufgetragen, kritisch ausgeglichen, und die ausgeglichenen Werte in die ursprünglichen η - T -Kurven zu deren Berichtigung übertragen. Nötigenfalls wurde das Verfahren danach nochmals an $d\eta/dT$ wiederholt.

Damit waren die η und ihre ersten Temperaturkoeffizienten $d\eta/dT$ von den größten Unsicherheiten befreit, soweit solche nicht ganze Versuchsreihen als solche treffen und daher so nicht auszuschneiden sind.

Diese η und $d\eta/dT$ sind unser Ausgangsmaterial.

3. Die Arbeitsmethode

Wir suchten zuerst *das Gemeinsame der Temperaturfunktionen aller Gase* auf, durch Vergleichung, und fanden so die schon mitgeteilte Gleichung

$$(1) \quad \left(\frac{d \ln \eta}{d \ln T} \right)_{T_k} = 1,$$

die man in Parallele stellen kann zu dem bekannten, jetzt analog geschriebenen Gesetz:

$$(2) \quad \left(\frac{d \ln \eta}{d \ln p} \right)_T = 0.$$

Zweitens suchten wir die *Form der Temperaturfunktion* auf, die sich für *alle Gase* benützen läßt und für T_k Gl. (1) liefert, also $\frac{d \ln \eta}{d \ln T} = m = f(T)$.

Drittens prüften wir dabei, ob die klassische Annahme, der *Grenzexponent n von T in*

$$(3) \quad \begin{cases} \eta = a T^n & \text{für } T = \infty \text{ sei gleich } 1/2, \\ \text{also } \eta = a \cdot T^{1/2} & \text{für } T = \infty \end{cases}$$

richtig sei. Sie erwies sich aber als nicht allgemein richtig und trifft wohl nur für schwere oder vielatomige Molekeln als Grenzfall zu. Daher suchten wir das Gesetz für die Stufung der Grenzexponenten zu formulieren.

Viertens suchten wir das Gesetz für die Stufung der kritischen (idealen Gas)-Reibung η_k auf, woraus man vermöge der noch freistehenden Wahl

$$(4) \quad \eta_k = a \cdot T_k$$

nach Gl. (1) allgemein a erhält.

Daß wir gerade die Definition (4) für a wählen, geschieht aus zwei Gründen. Einmal ist T_k der einzige, erfahrungsgemäß sicher ausgezeichnete Punkt der T -Skale für jedes Gas, während $T=0$ oder $T=\infty$ streng genommen beides Asymptotengebiete, und dazu empirisch unzugänglich sind.

Könnte man doch den Nernstschen Wärmesatz auch dahin aussprechen: Es gibt keinen absoluten Nullpunkt. Oder umgekehrt ihm die Parallele beifügen: Die Erreichung der absolut höchsten Temperatur ist unmöglich.

Zweitens bewährt sich unsere T_k -Bevorzugung auch bereits durch die Einfachheit der Beziehungen der η_k selbst untereinander und zu anderen Größen.

Da Gl. (1) ein Ergebnis von empirisch einleuchtender Gewißheit war, so ließ sich der zweiten Aufgabe mit der äußerst einfachen Vorstellung beikommen, die kritische Temperatur sei bei allen Gasen der „Mittelpunkt“ jenes Gleichgewichts, das wir zwischen der „Form von $T=0$ “ und der „Form von $T=\infty$ “ annehmen, jene Stelle also, wo die Anteile beider Formen gleich sind:

$$(5) \quad \frac{1-x}{x} = K (= 1 \text{ für } T_k).$$

Da es sich um ein „Isomeren“gleichgewicht „fast identischer“ Molekeln handelt, so muß es sich unabhängig vom Druck auch bei hohen Drucken ebenso einstellen. Mit anderen Worten, beim kritischen Punkt, wo Flüssigkeit und Gas koexistieren, ist jede von beiden Phasen aus je gleichen Anteilen von 0-Form und ∞ -Form gemischt, und also kein Unterschied mehr zwischen beiden. Auch sonst haben wir bei Lösung der zweiten Aufgabe uns auf die einfachst möglichen Funktionen beschränkt.

Die dritte Frage wurde wieder unmittelbar von der Erfahrung, unter Abänderung wieder einiger bisheriger Auffassungen, mit einleuchtender Gewißheit beantwortet, für H_2 und He, und mit erheblicher Wahrscheinlichkeit auch für Neon, so daß es sich nur um eine unvermeidliche, im Interesse stetiger Übergänge notwendige Verallgemeinerung handelte.

Dem letzten Wunsch, auch die η_k und damit die a vorzusagen zu können, kann selbstverständlich dadurch genügt werden, daß man die Funktionsform so lange abändert, bis hinreichend glatte Additivitäten oder doch ähnlich einfache Beziehungen erzielt sind.

In diesem letzten Zusammenhang müssen wir aber daran erinnern, daß man die Stoffkonstanten kat' exochen, die Kernabstände z. B., oder die Bildungswärmen, und zu ihnen hätte man auch die η_k zu stellen, im allgemeinen überhaupt nicht zu „berechnen“ pflegt, sondern nur zu tabellieren. Da wir nun uns nicht hiermit begnügen, sondern die Tabellen in Berechnungsvorschriften verdichten wollen, so gehen wir mit diesem Bemühen, wie man sieht, noch über die üblichen Ansprüche an Voraussagbarkeit hinaus.

4. Verhältnis zur Gastheorie und Thermodynamik

Die Aussagen der Gastheorie über η lassen sich in zwei Ausdrücke zusammenfassen:

$$(6) \quad \eta = \frac{\text{const } \sqrt{MT}}{q \left(1 + \frac{C}{T}\right)} \text{ (Sutherland-Reinganum).}$$

Darin ist q der immer unscharfe Molekelquerschnitt, C die Sutherlandkonstante (Abkürzung für die Reinganumsche Reihe); const ist ein nur der Größenordnung nach bekannter Zahlenfaktor, der ebenfalls unscharf ist, von Modellannahmen abhängt. Gl. (6) (mit konstantem C) hat schon Sutherland selbst als nahe bei T_k unbrauchbar bezeichnet, während wir ihr Versagen auch vielfach sonst feststellten.

Nach Maxwell ist

$$(7) \quad \eta = \text{const } T^n,$$

wo const der Größenordnung nach bekannt, entsprechenden Einwänden wie const in (6) ausgesetzt, n aber ebenfalls von

speziellen Annahmen (Abstoßungsgesetz) abhängig ist, und erfahrungsgemäß mit T sich erheblich ändert.

Während Sutherland und Reinganum C durch Schwarmbildung deuten (Querschnittsvergrößerung), spricht Veränderlichkeit von n eine der „Härte“ der Molekel aus. Weder n noch C konnte man bisher selbst bloß für engere Temperaturbereiche einigermaßen genauer voraussagen.

Eine Art Voraussage derart stellt die Lothar Meyer-Vogelsche Gleichung dar

$$\eta = \frac{2,80 \cdot 10^{-8} \cdot \sqrt{MT}}{V_s^{1/3} \left(1 + 1,47 \cdot \frac{T_s}{T} \right)},$$

worin T_s der Siedepunkt bei Normaldruck und V_s das Molvolumen der Flüssigkeit bei dieser Temperatur ist. Die Gleichung arbeitet für Zimmertemperatur auf etwa 6—20 v. H. genau.

Gl. (7) läßt die Frage, ob n mit steigendem T überhaupt auf einen Grenzwert konvergiert, ganz offen. Gl. (6) fordert allgemein als Grenzwert $n = \frac{1}{2}$; und dies ist auch meist angenommen worden.

Daß man, wie Chapman tat, C/T natürlich durch ein Glied $-\frac{C'}{T^2}$ ergänzen kann usf., erhöht zwar die Konstantenzahl noch weiter, trägt aber nichts wesentlich Neues zum ganzen Bilde bei.

Überzeugt, daß eine ins einzelne gehende Mechanik des Stoßes, des Elementarprozesses der Reibung, wegen der nach den klassischen Arbeiten bekannt gewordenen Quantengesetze bestimmt zu Widersprüchen gegen die Erfahrung führen müsse, und zugleich eine unangemessene Verwicklung der Ausdrücke für einfache Verhältnisse bereits mitführe, haben wir uns nur für das ganz Qualitative mechanischer Vorstellungen bedient, z. B. an folgenden Stellen:

1. Wir haben die übliche Annahme, n konvergiere allgemein mit steigender Temperatur auf $\frac{1}{2}$, dahin eingeeengt, daß $\frac{1}{2}$ bloß der niederstmögliche T -Exponent für hohe T sei. Grund zu unserer Einstellung ist auch hier die Erfahrung. Denn wir kennen nicht mit Sicherheit irgendetwas kleineres n .

Widersprechen würde ein solches unseren theoretischen Grundlagen nicht.

2. Die „Impulszersplitterung“, die ein Maß der „Ausbeute“ im Sinn des Reibungsvorgangs ist, nehmen wir um so größer an, *cet. par.*, je größer Masse und Zahl der beteiligten Atome ist, also je größer das Produkt $M \cdot N$ aus Atomzahl N und Molekulargewicht M .

Mehr Hilfsmittel verdanken wir der Thermodynamik.

Temperaturkoeffizienten rein kinetischer Größen thermodynamisch, durch simultane Gleichgewichte zu deuten, ist bekanntlich schon vielfach mit Erfolg versucht worden, so bei der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit dort, wo man ein Aktivierungs-gleichgewicht vorgeschaltet denkt, und auch a. a. O.

Für die Gasreibung haben wir dasselbe getan, jedoch in einem sehr verallgemeinerten, und deshalb sehr allgemeiner Anwendung fähigen Sinn. Wir haben die sämtlichen Molekelzustände zwischen $T = 0$ und $T = \infty$ als Gleichgewichtsmischung zwischen den diesen beiden Punkten eigenen Zuständen aufgefaßt. Und dies „Gleichgewicht“ hat mehr nur den Sinn eines „Verteilungsgleichgewichts“ im Sinn der Gastheorie ähnlich, wie es etwa im speziellen Maxwellgesetz vorausgesetzt ist. Solch ein Verteilungsgleichgewicht nun besteht zweifellos bis auf geringfügige Störungen auch bei meßbarer Gasreibung, Wärmeleitung, Diffusion und chemischem Umsatz. Und dies, obwohl bei allen vier Vorgangsarten die molekulartheoretische Behandlung gerade auf diese Störung Rücksicht nehmen muß.

Ein zweiter Punkt, wo wir zum Teil thermodynamisch dachten, liegt in der Umdeutung des Maxwell'schen Temperaturexponenten n ; wir schreiben:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} n + \frac{dn}{dT} \cdot T \ln T = m = \frac{d \ln \eta}{d \ln T} = \frac{U}{RT}, \\ \text{worin } U \text{ die Aktivierungswärme für } \eta. \end{array} \right.$$

Insoweit ist dies chemisch-kinetisch, aber keineswegs thermodynamisch gedacht. Die Thermodynamik hat dabei lediglich als Rahmenbedingung gedient.

Gl. (8) stellt in der Form die symmetrischste Schreibweise aller „Isochoren“ dar, indem m darin als in RT als Einheit gezählte Energie erscheint. Üblich war ein bilogarithmischer T -Koeffizient bisher nur bei

den Dampfdrucken binärer Mischungen (vgl. z. B. bei J. P. Kuenen, S. 121 von Bd. 4 von G. Bredigs ausgezeichnete Sammlung: Handb. d. angew. physikal. Chemie).

Sieht man jetzt die Aktivierungswärme U als zusammengesetzt an aus zwei Aktivierungswärmen, nämlich aus denen zweier Stoffformen, die miteinander im Gleichgewicht stehen; dann steckt aber in dieser zusammengesetzten Aktivierungswärme, und zwar in der der Hochtemperaturform, noch die Umwandlungswärme aus der Tieftemperaturform in sie, also eine echte Gleichgewichtswärmetönung. So kommt dann durch diese die individuelle Mannigfaltigkeit der m und ihrer Temperaturfunktion zustande, auf die wir nachher sogleich eingehen, wenn das Zweiformgleichgewicht behandelt wird.

Weder thermodynamisch, noch chemisch-kinetisch, noch gastheoretisch, sondern im Sinn einer Erweiterung von Gedanken von van der Waals ist es, wenn wir den „Mittelpunkt“ der Temperatur für das Zweiformgleichgewicht, also den Punkt gleicher Mengen beider Formen auf die kritische Temperatur T_k legen. Daß wir damit auch gewissermaßen die Gradintervalle durch die reduzierten Temperaturen individuell machen, versteht sich.

Wenn wir schließlich die zuletzt hinterbleibende Vorausbestimmung der noch nötigen Stoffkonstanten (Grenzwert m_g ; kritischer η - T -Koeffizient η_k/T_k) auf phänomenologisch gewonnene einfache Zahlenregeln gründen, so verfahren wir damit genau so, wie man an den wenigen Stellen, wo überhaupt nach solcher Voraussage gefragt wird, bisher schon zu tun pflegte. Meist allerdings, so bei Wärmetönungen und Molwärmen z. B., wird die Frage nach Vorausberechnung — merkwürdigerweise — noch kaum erhoben, sondern auf Tabellen, wie Landolt-Börnstein und dergleichen verwiesen. Wir gehen also darin weiter, und suchen auch die zuletzt hinterbleibenden Tabellen noch in wenige Regeln zu verdichten.

5. Ergebnisse

I. Der Temperaturkoeffizient der Gasreibungskonstante η

Die Frage nach dem T -Koeffizienten der Gasreibung ist identisch mit der nach dem T -Koeffizienten und Betrag der zugehörigen Aktivierungswärme. Ihr Relativbetrag $m = U/R T$

ist definiert durch Gl. (8). Darin hat man empirisch folgende Fixpunkte:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} R T_k = U_k; \quad m = 1 \text{ für } T = T_k \\ \qquad \qquad \qquad (\text{allgemeine Tatsache}), \\ \lim_{T=\infty} m R T = m_g \cdot R T = U_g; \quad m = m_g, \text{ für hohe } T \\ \qquad \qquad \qquad (\text{Tatsache bei H}_2, \text{He}). \end{array} \right.$$

Die Annahme der Symmetrie bezüglich T_k führt zu

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{T \rightarrow 0} m R T = (2 - m_g) \cdot R T = U_0; \quad m = 2 - m_g \text{ für } T = 0 \\ \text{(Symm. bezügl. } T_k). \end{array} \right.$$

Der Wertebereich der Grenzwärmen m_g ist also, wenn man die Annahme $m_{g \min} = 1/2$ hinzufügt (analog $n_{g \min} = 1/2$), was $m_{g \max} = 1$ ($n_{g \max} = 1$) mitbringt,

$$(11) \quad 1 \geq m_g \geq 1/2.$$

Der Übergang von $2 - m_g$ über 1 nach m_g wird durch unsere *Mischungsannahme* gedeutet. Es sei $(1 - x)$ vom Ganzen mit der Aktivierungswärme U_0 vorhanden, und x Anteile mit U_g , so daß die Mischung die Aktivierungswärme U hat; dann ist:

$$(12) \quad U = U_0(1 - x) + U_a \cdot x.$$

Fügen wir jetzt, weil die Eigenschaften des Gases doch stationär bleiben, die Forderung des *Gleichgewichts* zwischen beiden Formen hinzu, so folgt für dies „Isomeren“-Gleichgewicht:

$$(13) \quad K = \frac{x}{1-x} = \frac{U_0 - U}{U - U_\theta}; \quad \text{für} \quad \begin{matrix} T_\infty = \infty \\ T_k = 1 \\ T_0 = 0. \end{matrix}$$

Die Wärmetönung dieses temperaturabhängigen Isomergleichgewichts wäre streng thermodynamisch:

$$(14) \quad R T^2 \cdot \frac{d \ln ((U_0 - U)/(U - U_g))}{dT} = W.$$

Der *Temperaturkoeffizient der Umwandlungswärme* W muß jetzt wieder rein thermodynamisch gleich dem Molwärmeunterschied beider Formen sein, also:

$$(15) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial T} \right)_v = C_v - 0.$$

Da es sich nun bei der Reibung nur um die Übertragung der Flugenergie handelt, so kommt nur der translatorische Anteil in Betracht und die für die Reibung maßgebende Molwärme ist daher

$$(16) \quad C_{v\eta} = 3R/2.$$

Man darf vermuten, daß eine ganz entsprechende Ableitung für die Wärmeleitungskonstante κ gemacht werden kann, daß aber hier dann der volle Betrag von C_v in (15) und (16) zu stehen hat, also die Sonderrolle der einatomigen Gase, die sich übrigens gewissermaßen schon in der richtigen Vorausberechenbarkeit des η - κ -Faktors für sie kundgibt, dort hervortreten muß. Und es geht vielleicht auch nicht zu weit, den gastheoretisch nicht gefaßten η - κ -Umrechnungsfaktor für mehratomige Gase zurückzuführen auf den gastheoretisch richtig abgeleiteten η - κ -Faktor einatomiger Gase zuzüglich dessen, der aus der Ersetzung von $\frac{3}{2}R$ in (15) und (16) durch das volle C_v entspringt. Man wird das freilich nicht allzubald prüfen können, weil die Zahlwerte gemessener κ - T -Koeffizienten so gar sehr im argen liegen, und auch die κ -Werte selbst im allgemeinen sehr hinter η zurückstehen.

Kehren wir jetzt zu (15) und (16) zurück. Sie liefern zusammen die Angabe, daß

$$(17) \quad \frac{d \ln K}{dT} = \frac{3}{2T}, \quad \text{d. h. } K \sim T^{3/2}.$$

Bedenkt man, daß Gll. (9b) und (10) zwar die Zahlwerte von U_g und U_0 definieren, daß aber beiden Formen des Gases Existenz nebeneinander bei allen anderen Temperaturen zugeschrieben werden muß, um unserer Gleichgewichtsvorstellung zu entsprechen, so wird:

$$(18) \quad \frac{2 - (m + m_g)}{m - m_g} \sim T^{3/2}.$$

Damit dieser Ausdruck für $m = 1$, für die kritische Temperatur T_k gleich eins wird, genügt

$$(19) \quad \frac{2 - (m + m_g)}{m - m_g} = \left(\frac{T}{T_k} \right)^{3/2}.$$

Jedenfalls ist dies die einfachste Formulierung und sie befriedigt in der Tat das ganze große Erfahrungsmaterial.

Gl. (19) versucht im Geltungsbereich des Gasgesetzes die Temperaturfunktion von η vollständig darzustellen. Setzte man statt $3/2$ als Exponenten C_v/R an, so hätte man, trifft unsere oben ausgesprochene (S. 200) Vermutung zu, die Temperaturfunktion von κ im selben Bereich vollständig in der Hand. Während man sie aber für die Wärmeleitung heute noch nicht prüfen kann, ist das bei η in reichem Maß der Fall. Wir lösen die Grundgleichung (19) nach m_g auf:

$$(20) \quad m_g = \frac{m - (2 - m) \left(\frac{T_k}{T} \right)^{3/2}}{1 - \left(\frac{T_k}{T} \right)^{3/2}}$$

und behaupten, daß für jedes Gas hieraus ein konstantes m_g sich berechnen muß, wenn man die experimentell bestimmten m (vgl. S. 193) einsetzt. Das ist in der Tat der Fall. Bei H_2 und He findet man 0,66 bis 0,67, bei Ne 0,61, bei Ar 0,60, bei CH_4 0,588, bei O_2 0,555, bei SO_2 0,516 usw., und bei NH_3 sogar 0,89, bei HCl 0,78. Wo die Zahlwerte leidlich sicher sind, da liegen sie ausnahmslos zwischen 1 und $1/2$, wie Gl. (11) aussagte, deren Außenseiten wir in (19) nicht eingeführt haben. Nahe bei T_k geht (20) in O/O über, so daß hier die Meßungenauigkeiten in m unbegrenzten Einfluß gewinnen; in diesem Gebiet, worin man in schweren Gasen zu messen pflegt, gelingt also die m_g -Bestimmung aus (20) nicht mehr. Doch deutet alles darauf hin, daß in allen diesen Fällen m_g nahe an $1/2$ liegt, ausgenommen jene Gasgruppe, die mit relativ kleinem M und kleiner Atomzahl N sehr hohe T_k verbindet (H_2O , NH_3 , HCN, HCl usw.); diese letzteren haben sehr große m_g und sind beständig genug, um sie, entfernter von T_k , noch aus (20) ermitteln zu können.

Als Beispiel für die Leistung von (19) bzw. (20) führen wir die aus Messungen nach (20) ermittelten m_g für Ne ($T_k = 44,74$) und CO_2 ($T_k = 304,2$) an, neben $(T_k/T)^{3/2}$. Man sieht, daß die Schwankungen etwa $\pm 0,015$ bis $\pm 0,02$ betragen. Sie bleiben unter der Fehlergrenze der η -Werte, stammen nur von den Meßfehlern in den η -Werten. Man erkennt auch das O/O -Werden nahe bei T_k in den CO_2 -Zahlen (in Klammer):

Tabelle 1

Beleg für die Konstanz des Grenzwertes m_g , berechnet aus (20).

$10^3 \cdot (T_k/T)^{3/2}$	m_g	$10^3 \cdot (T_k/T)^{3/2}$	m_g
9,66	0,599	2,40	0,623
8,16	,592	2,17	,624
7,03	,592	1,92	,626
6,14	,606	1,707	,625
5,42	,600	1,533	,626
4,82	,606	1,387	,622
4,33	,610	1,263	,619
3,92	,611	1,155	,617
3,57	,611	1,063	,614
3,27	,615	,983	,610
3,01	,616	,911	,607
2,78	,616	,848	,608
2,58	,621		
Gesamtmittel: 613			

Neon

$10^3 \cdot (T_k/T)^{3/2}$	m_g	$10^3 \cdot (T_k/T)^{3/2}$	m_g
108,8	+ 2,217	27,2	0,522
97,5	- 3,335	24,6	,538
85,5	0,150	23,3	,527
76,9	0,395	20,5	,527
69,5	0,466	18,8	,520
63,3	0,525	17,4	,515
57,9	,524	16,2	,522
53,3	,553	15,0	,548
49,3	,523		
45,7	,537		
42,6	,543		
38,5	,513		
33,9	,529		
30,2	,533		
Gesamtmittel: 0,528			

CO₂

Das Bild dieser Tabelle ist typisch für den ganzen Befund. Übrigens sind den ersten vier Neonzahlen graphisch extrapolierte η zugrunde gelegt.

Bei Wasserstoff und Helium läßt sich der Vergleich mit dem Experiment dank den von Hrn. Nernst veranlaßten Messungen Günthers sogar bis dicht an den absoluten Nullpunkt verfolgen, und auch da stimmt Berechnung und Messung noch zusammen. Und hier konvergiert, wie es nach der Symmetrie unseres Ansatzes sein muß, η auf eine Proportionalität

zu $T^{1/2}$, rascher oder langsamer, je nachdem, welchen Zahlwert m_g hat. Proportionalität zu $3/2$ ist vor Jahren hier für die tiefsten Temperaturen von Hrn. Nernst, gedeutet als Gas-entartung, vorausgesagt worden, ein neuer Beweis für seinen bekannten sicheren Blick; denn die beiden Exponenten liegen doch recht nahe beisammen.

Es ist schön zu sehen, wie unsere Gleichung für schwere Gase (wo $n_0 = 3/2$) Hrn. Nernsts Voraussage für die tiefsten T in sich schließt, anderseits aber darüber hinausgeht, indem sie zeigt, daß für leichte Gase oder für höhere Temperaturen Abweichungen davon sich zeigen müssen und wie groß sie bei den Meßtemperaturen $T = 15$ und $T = 20$ zu sein haben, und auch in der Tat sind.

Haben wir somit wohl das *Gemeinsame der Temperaturfunktion der η für alle Gase in Gl. (19)* in nuce erhalten, so ergab sich dabei gleichzeitig, daß die Annahme, die Grenzwärme sei allgemein $1/2$ für hohe Temperaturen, nicht zutrifft.

Vielmehr erweist sich die Grenzwärme m_g als eine typische *Stoffkonstante*, die nur für große und vielatomige Molekeln gegen $1/2$ konvergiert.

Bedenkt man, daß ihr Stufungsbereich nur zwischen 1 und $1/2$ liegt, während die von den η -Messungen bedingte Fehlergrenze im anspruchsvollsten Fall 0,015, also $1/2$ v. H. bis 3 v. H. an m_g ausmacht, so erscheint es nicht schwierig, Regeln zu ihrer hinreichenden Vorausberechnung aufzufinden. Aber diese Erwartung wird einigermaßen enttäuscht, weil auch hier wieder die seltsamen, durch Sprünge geschiedenen Gruppen auftreten, die wir auf dem Gebiet statistischer Eigenschaftsgrößen (C_v und η) schon früher festgestellt und beschrieben haben.

Für die Regeln, die wir suchen, also für ein stark empirisches Geschäft, ist nun endlich auch wieder eine molekulare Vorstellung nützlich.

Der Grenzwert m_g setzt sich nach ihr, wie wir sahen, zusammen aus dem unteren Grenzwert $1/2$, bei dem wir maximale Impulszersplitterung bei jedem Stoß hätten, während der Überschuß über $1/2$ eine Art Persistenz von Impuls mißt. Wir müssen also erwarten, daß $m_g - 1/2$ mit steigendem Molekulargewicht M und steigender Freiheitszahl, also steigender

Atomzahl N abnimmt, und also wohl einer Potenz von MN verkehrt proportional gesetzt werden kann.

In der Tat kommt man mit den bis heute feststellbaren m_g in Einklang mittels des Ansatzes

$$(21) \quad m_g - 1/2 = \left(\frac{A}{MN} \right)^B,$$

worin die Konstanten A und B gruppenweise je gleiche Werte haben, wie folgende Tabelle zeigt:

Tabelle 2

Zahlwerte der Grenzwärme m_g , gefunden nach Gl. (20) und berechnet nach Gl. (21), sowie der Konstanten A und B

Gas	m_g gef.	m_g ber.	A	B
I				
H ₂	0,667	0,666	51,7	0,20
He	0,66	0,667	51,7	0,20
Ne	0,611	0,621	51,7	0,20
Ar	0,602	0,605	51,7	0,20
CH ₄	0,588	0,592	51,7	0,20
II				
N ₂ , CO	0,571	0,571	8,55	1,41
O ₂	0,555	0,558	8,55	1,41
CO ₂ , N ₂ O	0,526	0,521	8,55	1,41
SO ₂	0,516	0,512	8,55	1,41
C ₂ H ₄	0,517	0,515	8,55	1,41
C ₂ H ₆	0,5	0,509	8,55	1,41
C ₃ H ₈	0,5	0,503	8,55	1,41
III				
NH ₃	0,888	0,888	56,0	4,87
HCl	0,777	0,777	56,0	4,87
HCN	—	0,665	56,0	4,87

Die A sind bei der ersten und dritten Gruppe fast gleich, während A der dritten mit $7A$ der zweiten genähert gleich ist. Die Exponenten B stehen sehr nahe im Verhältnis 1 : 7 : 7¹/₂.

An der scharfen Scheidung der drei Gruppen kann kein Zweifel bestehen. Der ersten gehören die Edelgase an, deren η man als T -Funktion kennt, weiter H₂ und sein erstes C-Homologes, das CH₄, beides Gase mit $M < 25$ und $T_k < 200$.

Die zweite Gruppe enthält diejenigen Gase, deren $M > 20$ und bei denen der Kennbruch $T_k/MN < 2,5$. Dieser Bruch und

diese Ungleichung für ihn kennzeichnet die normalen T_k am besten, so daß man nach dem Zahlwert dieses Bruchs voraussagt, zu welcher Gruppe ein Gas gehört, nachdem man die erste Gruppe ausgeschieden hat.

Bei der dritten Gruppe liegt der Bruch zwischen 4 und 6.

Einer vierten Gruppe gehört NO allein (und vielleicht Cl_2) an, mit einem Bruch 3,00 und $m_g = 0,503$; einer fünften jedenfalls das Wasser mit einem Bruchwert 11,97; man könnte von ihm vermuten, daß sein m_g etwa oder auch genau gleich 1 ist und bleibt, und so die einzigartige Beschaffenheit des Wassers hervorhebt.

In der ersten Gruppe, wo die Abhängigkeit von MN am geringsten ist, bewegt sich demgemäß der Bruchwert fast über seinen ganzen Variationsbereich, nämlich von 1,3 bei He bis 8,3 bei H_2 .

Bei hinreichend großem MN und T_k also geht m_g mit wachsendem T_k/MN sprunghaft auf zunächst kleinere, dann auf größere Werte, bis gegen 1.

Chemisch sind die Gruppen deshalb von großem Interesse, weil in der ersten die leichten, im ganzen passiven Gase, in der zweiten, der weitaus größten (T_k/MN liegt, wie Tab. 3 zeigt, für die meisten Gase zwischen 0 und etwa 2,5) die „normalen“, in sehr inhaltsarmen höheren Gruppen aber chemisch — man denke an die organische Chemie — abnorm aktiv oder aktivierende isoliert sich finden.

Eine einfache Beziehung der Gruppen zum Dipolmoment scheint zu fehlen, wie ein Hinweis auf SO_2 in der zweiten, NH_3 und HCl in der dritten Gruppe lehrt; eine rohe Ungefährbeziehung ist wohl da.

Abgesehen also von den isoliert stehenden chemischen Einzelgängern H_2O , NO und dgl., die man am abnormen T_k/MN im voraus feststellt, sind damit wohl für fast alle in Betracht kommenden Gase die m_g längst genau genug vorauszusagen.

Damit ist die praktische Seite der m -Berechnung so ziemlich erledigt.

So wenig man nun heute im allgemeinen nach wirklich theoretischer Vorausberechnung etwa von Wärmetönungen aus Modellen komplizierterer Molekeln zu fragen wagt, so wenig

Tabelle 3

Zahlwerte des Kennbruches T_k/MN .
Aus Siedepunkten berechnete T_k in Klammer.

Gas	Bruch	Gruppe	Gas	Bruch	Gruppe
He	1,296	I	<i>i</i> -C ₄ H ₁₀	,501	(II)
H ₂	8,26	I	CH ₃ Cl	1,648	(II)
Ne	2,17	I	Cl ₂	2,942	?
N ₂	2,25	II	α -Butylen	(,622)	(II)
CO	2,40	II	γ -iso-Butylen	,630	(II)
Ar	3,78	I	JH	1,656	(II)
O ₂	2,41	II	<i>n</i> -C ₄ H ₁₀	,525	(II)
N ₂	3,00	V	β -Butylen	(,640)	(II)
CH ₄	2,37	I	SO ₂	2,243	(II)
Kr	2,54	?	HCN	5,63	(III)
SiH ₄	1,69	?	iso-Amylen	,442	(II)
C ₂ H ₄	1,681	II	CH ₃ Br	,984	(II)
X	2,22	?	CH ₂ Cl ₂	1,22	(II)
CO ₂	2,305	II	CHCl ₃	,891	(II)
C ₂ H ₆	1,27	II	CCl ₄	(,711)	(II)
C ₂ H ₂	1,93	(II)	Cyklohexan	,366	(II)
NO ₂	2,35	II	Benzol	,600	(II)
HCl	4,45	III	Br ₂	1,798	(II)
HBr	2,25	(II)	Thiophen	,780	(II)
CH ₂ :CH-CH ₃	,777	(II)	SnCl ₄	,456	(II)
C ₃ H ₈	,765	II	Toluol	,430	(II)
(CH ₃) ₃ Ring	(,796)	(II)	CH ₃ COOH	1,237	(II)
COS	2,10	(II)	CH ₃ -Thiophen	(,514)	(II)
(CH ₃) ₂ O	,716	(II)	Thiazol	(,895)	(II)
C ₂ N ₂	1,927	(II)	Pyridin	,617	(II)
Allylen	1,438	(II)	H ₂ O	11,97	VI
NH ₃	5,96	III	J ₂	1,538	(II)

Aus diesen Zahlen geht hervor, wie selten der Kennbruch den Bereich der Gruppe II verläßt, und an wie wenigen Stellen, wo Gruppen aneinandergrenzen, die Gruppenzugehörigkeit noch ungewiß ist. Wo die Gruppenangehörigkeit *experimentell* noch nicht geprüft (und übrigens meist so auch nicht zuverlässig prüfbar) ist, steht die Gruppe in Klammer.

wird solche Frage hinsichtlich der doch nur roh zugänglichen „Exponenten von Exponenten“, der *B* also, und auch der *A* zunächst dringlich sein; interessant bleibt sie natürlich. In diesem Zusammenhang ist wichtig, daß Dipolmoment (vgl. oben), Paramagnetismus (vgl. O₂ in Gruppe 2 und NO in Sondergruppe) oder sonstige derartige Größen sichtlich nicht entscheidend sind, auch nicht bloß Assoziationsneigung (nur stärkste ist wichtig, vgl. Gruppe 3), sondern, bei nicht zu

leichten Gasen, wesentlich der Zahlwert von T_k/MN , also diese drei Eigenschaften: T_k , M und N .

Bisher haben wir uns nur um den bilogarithmischen Temperaturkoeffizienten m von η , also um $d \ln \eta / d \ln T$ gekümmert. Denn er zeigte sich einfachen theoretischen Ansätzen, die mit der Erfahrung übereinstimmen, am ehesten zugänglich. Jetzt wenden wir uns dem T -Exponenten in $\eta = a T^n$ zu.

Dazu wollen wir die mittlere Gl. (8) unter Einsetzung der nach m aufgelösten Gl. (20) integrieren:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \int d \ln \eta &= \int \frac{m}{T} dT + \ln k = \ln \eta \\ &= \ln \{ (T^{2/3} + T_k^{2/3})^{1/2} (m_g - 1) \cdot T^{(2-m_g)} \} + \ln k. \end{aligned} \right.$$

Benützt man den zweiten Teil dieser Gleichung mit dekadischen Logarithmen zur Berechnung von $\log k$ aus einem $\log \eta_T$ für eine Temperatur T , der hinreichend sicher ist — als solchen wählen wir η für $T = 300$ aus der mehrfach ausgeglichenen η - T -Kurve, so gewinnt man [unabhängig noch von Gl. (4)]:

$$(23) \quad \text{für } T_k \quad \log \eta_k = \log k + \log (2^{1/3} (m_g - 1) \cdot T_k^{m_g})$$

oder η für irgend andere Temperaturen.

Definiert man jetzt, ohne noch über die Konstante a die Voraussetzung (4) einzuführen:

$$(24) \quad \eta = a \cdot T^{n_T}$$

und steckt alle Temperaturabhängigkeit in n_T , so ist dieser T -Exponent mit dem bilogarithmischen Koeffizienten m notwendig durch die Gleichung verbunden:

$$(25) \quad m = n + T \ln T \cdot \frac{dn}{dT}.$$

Was wir (vgl. frühere Mitteilungen) bisher aus Messungen als „ T -Exponenten“ berechneten, ist nach dem Berechnungsverfahren in unserem jetzigen strengen Sinn nicht n , sondern der bilogarithmische T -Koeffizient m :

$$(26) \quad m_T = \frac{\log \eta_2 / \eta_1}{\log T_2 / T_1},$$

für Intervalle ohne Voraussetzung über a berechnet.

Zur Gewinnung von den n gehen wir den Weg über die Gl. (4), die a in (24) definiert und erhalten damit:

$$(27) \quad n_T = \frac{\log \eta - \log a}{\log T}.$$

Der Zähler dieses Bruchs hat, als Funktion von T_k und m_g nach (22) und (4) ausgedrückt, die Bedeutung:

$$(28) \quad n_T \log T = \log \left[\left(\frac{T^{3/2} + T_k^{3/2}}{2} \right)^{1/2 (m_g - 1)} \cdot T^{(2 - m_g)} \cdot T_k^{(1 - m_g)} \right].$$

Daraus ist auch m_g als Funktion n und T_k leicht zu gewinnen.

Gl. (28) liefert die Angabe, daß n sowohl für $T = T_k$ wie für $T = \infty$ mit m übereinstimmen muß; damit ist in diesen beiden Fällen in Gl. (25)

$$(29) \quad \frac{dn}{dT} = 0.$$

Während aber m_g in mehreren Fällen sogar im Meßgebiet wirklich erreicht werden konnte, so bei H_2 , He, Ne, wohl auch Ar, strebt der Exponent n viel langsamer dem Grenzwert zu, so daß dieser experimentell nirgends erreicht wird.

Daß auch

$$(30) \quad m_k = n_k = 1 \text{ bei } T = T_k,$$

folgt aus (4) und (1) und ist an den Stellen, wo T_k im Meßgebiet lag, auch bestätigt. Vermöge (30) verfügt man in den *kritischen Gasreibungen* η_k über Größen, die für alle Gase untereinander vergleichbar und durch z. T. (s. w. u.) verblüffend einfache Gesetzmäßigkeiten untereinander verbunden sind. Und man könnte deshalb hier wieder Anschluß ans Übereinstimmungstheorem versuchen.

Man sieht aber, daß die η bei übereinstimmenden, d. h. gleichen reduzierten Temperaturen sich dennoch verschieden verhielten, weil die Exponenten n im allgemeinen verschieden sind. Schreibt man (25)

$$(31) \quad m = n + \frac{dn}{d \ln (\ln T)},$$

so zeigt die Erfahrung, daß der darin stehende logarithmische log- T -Koeffizient unter T_k positiv, bei T_k Null, über T_k negativ ist.

Die praktische Ermittlung von m_g aus Messungen gründet sich natürlich stets auf Gl. (21). Sie kann also nur in hinreichender Entfernung von T_k Gutes leisten. Liegen aber, was bei mittelschweren Gasen stets der Fall, die Messungen alle um T_k , so bleibt nur übrig, aus ihnen einen schlechten m_g -Wert abzuleiten, ihn in (24) zur Ermittlung eines schlechten k zu benutzen, damit den Gang der η zu berechnen. Dann vergleicht man mit den gemessenen η und verbessert die m_g anpassend, und dadurch auch die k . Die Rechtfertigung dieses Anpassungsverfahrens liegt darin, daß (20) und (24) sich bei allen Messungen ferner von T_k bewährt haben.

Im folgenden führen wir noch ein Zahlenbeispiel für die m - und n -Werte an:

Tabelle 4
Methan (CH_4).

T	$m_{\text{gef.}}$	$m_{\text{ber.}}$	$\eta_{\text{gef.}}$	$\eta_{\text{ber.}}$
312,5	0,8497	0,8533	0,9933	0,9936
337,5	,8302	,8331	,9916	,9916
362,5	,8157	,8150	,9892	,9895
387,5	,8026	,7991	,9874	,9875
412,5	,7902	,7845	,9852	,9855
437,5	,7776	,7715	,9832	,9835
462,5	,7745	,7600	,9804	,9815
487,5	,7606	,7495	,9797	,9796
512,5	,7466	,7400	,9778	,9777
537,5	,7305	,7314	,9762	,9759
575	,7136	,7198	,9734	,9732
625	,7000	,7064	,9698	,9698
675	,6850	,6953	,9664	,9666
725	,6750	,6855	,9631	,9636
775	,6627	,6773	,9601	,9608

Was jetzt die praktische Verwendung der gefundenen Beziehungen anlangt, so gestaltet sich die Berechnung einer η - T -Kurve für ein beliebiges Gas so:

Kennt man einen Absolutwert von η für eine beliebige Temperatur T hinreichend genau, so stellt man den Kennbruch T_k/MN fest, entscheidet mit ihm entsprechend Tab. 3 über die Gruppe, aus der man die Konstanten A und B in (21) entnimmt, gewinnt daraus m_g , hieraus mit (22) und (23) η_k , mit (24) a und mit (26) n für jede beliebige Temperatur; damit aber hat man η für jede Temperatur erhalten.

Kennt man zwei Absolutwerte von η für ein nicht allzu weites Temperaturbereich, so gewinnt man aus (27) das zu-

gehörige n und hat also zum vorigen Verfahren eine Kontrollangabe.

Ob man für die schweren Metaldämpfe noch aus der Siedetemperatur T_s nach $T_k = 1,56 \cdot T_s$ die kritische Temperatur berechnen kann, ist mehr als fraglich. Andererseits scheidet hier einstweilen experimentelle T_k -Bestimmung aus. Da nun aber die Geltung unserer η - T -Funktion, die doch auch die Edelgase umfaßt, hier kaum beschränkt sein dürfte, so wird man jetzt umgekehrt die *Gasreibung der Metaldämpfe benützen, um ihre kritische Temperatur zu ermitteln*. Man bedarf dazu nur noch des m_g für den Metaldampf. Nun ist dieser von großem Molgewicht und sicher impulsaufnahme-fähiger, impulszersplitternder als die Edelgasatome. Und so ist die Vermutung, daß hier allgemein m_g praktisch $1/2$ sei, immerhin wahrscheinlich.

Das Ergebnis der letzten Seiten ist also eine Berechnungsvorschrift auf theoretischer Grundlage, für das ganze Temperaturfeld im Bereich idealer Gase gültig, zur Voraussagung des η -Wertes bei jeder Temperatur, sofern man nur wenigstens einen η -Absolutwert kennt.

Man kann diesen empirisch bestimmen. Man kann ihn aber auch mit vielfach guter Näherung voraussagen, wie der folgende Abschnitt zeigt.

II. Der Absolutwert der Gasreibungskonstante η

Vergleichbar sind Absolutwerte von η bei gleichen T -Exponenten, also voraussichtlich am zweckmäßigsten bei T_k , wo der Exponent 1 ist. Hier bezeichnen wir η als η_k und nennen es die *kritische Reibungskonstante des idealen Gases*. Ihr Wertebereich erstreckt sich von etwa $60 \cdot 10^{-7}$ bei He bis etwa $3600 \cdot 10^{-7}$ bei J_2 und vielleicht 10^{-3} bei Hg. Die Unsicherheit in η_k erreicht bei Gasen mit hohem T_k (z. B. NH_3) schon $\sim \pm 1\frac{1}{2}$ Proz.

Zwei Wege bieten sich zur *Voraussage von η_k* für ein noch ununtersuchtes Gas:

Entweder findet man eine Funktion von η_k und anderen Stoffkonstanten, die, mindestens gruppenweise, praktisch gleichen Zahlwert hat.

Oder man kann eine Funktion von η_k derart ermitteln, daß sie sich additiv oder ähnlich aus Äquivalenten aufbauen läßt.

a) Die Reduktion der Variabilität der Reibungskenngrößen

1. Betrachtet man anstatt η den Quotienten η/\sqrt{T} , die Reibungskonstante, verglichen bei gleichen Fluggeschwindigkeiten, die man spezifische η_s nennen könnte, so findet man sie gruppenweise genähert gleich. Zwischen den Gruppen fehlen Zahlenwerte ganz oder sind selten. Solche Gruppenstufung stellt man natürlich durch Wahl geeigneter Funktionen mit kleinen ganzen Zahlen dar. Ganzzahligkeiten zwischen gleichen Eigenschaften verschiedener Stoffe sind methodische Selbstverständlichkeit. Das empirisch Bemerkenswerte liegt hier nur in der Tatsache der Gruppen, des Fehlens also von Sprüngen, mithin in den Gleichheiten oder Ungefährgleichheiten.

Die nachher folgende Tabelle zeigt, daß $\eta_k/\sqrt{T_k}$ solche Gruppen sehr deutlich hervortreten läßt, daß aber diese Zahlen noch keine Beziehungen zu haben scheinen zu den m_g -Gruppen, die wir oben nachwiesen.

Wohl aber springen die letzteren deutlich hervor, sobald man den kritischen η - T -Koeffizienten $\eta_k/T_k = d\eta/dT_k$ mit einer geeigneten Potenz der Atomzahl N multipliziert, also mit einem Ausdruck, der die Freiheitszahl enthält. Wählt man (empirisch) die 0,30906 Potenz, so rücken die entstehenden Zahlen, die wir z nennen wollen, im ganzen in ein sehr enges Bereich zusammen.

Tabelle 5

$$T_k; \eta_k; \eta/\sqrt{T_k} \cdot 10^7; T_k/\eta \cdot 10^3; z = N^{0,30906} \cdot \eta_k/T_k; p_k;$$

$$W = \eta_k \sqrt{\frac{6}{M^2 p_k^4}}; \text{ Atomzahl } N; \text{ für alle auf } \eta_k \text{ und } T_k \text{ vermessenen Gase}$$

Gas	T_k	$10^7 \eta_k$	$10^7 \eta_k/\sqrt{T_k}$	$T_k/10^3 \eta_k$	p_k	W	z	N
He	5,19	97	42,58	535	2,26	37,06	18,69	1
H ₂	33,18	152	26,38	2183	12,80	35,06	5,67	2
Ne	44,74	711	106,3	629	26,86	32,48	15,89	1
N ₂	125,96	835	74,4	1508	33,49	33,99	8,21	2
CO	134,4	857	73,9	1568	34,60	34,52	7,91	2
Ar	150,65	1242	101,2	1213	48,0	34,34	8,24	1
O ₂	154,27	1154	89,7	1337	49,71	34,94	9,27	2
NO	180,2	1210	90,1	1489	64,6	32,61	8,32	2

Tabelle 5 (Fortsetzung)

Gas	T_k	$10^7 \eta_k$	$10^7 \eta_k / \sqrt{T_k}$	$T_k / 10^3 \eta_k$	p_k	W	z	N
CH ₄	190,24	667	48,4	2852	45,60	31,31	5,77	5
Kr	210,6	1780	122,7	1183	54,27	33,27	8,45	1
SiH ₄	272,6	1076	65,2	2533	—	—	6,49	5
C ₂ H ₄	282,6	965	57,4	2928	50,7	34,11	5,94	6
N ₂	289,7	2249	132,1	1288	58,2	33,76	7,76	1
CO ₂	304,1	1504	86,2	2022	72,9	33,69	6,94	3
C ₂ H ₆	305,2	936	53,6	3261	48,8	33,18	5,83	8
C ₂ H ₂	308,6	1073	61,1	2876	61,6	28,26	5,33	4
N ₂ O	{ 311,9 — 309,6 }	1538	87,4	2013	71,65	34,96	6,98	3
HCl	324,5	1581	87,8	2053	81,8	36,07	6,03	2
HBr	364,1	2305	120,8	1580	84,4	35,58	7,85	2
Propylen	364,1	1045	54,8	3484	45,3	30,46	5,66	9
C ₃ H ₈	370,6	990	51,4	3743	45	31,62	5,61	11
Cyklopropan	(373)	1113	57,7	3351	—	—	5,88	9
COS	378	1572	80,9	2404	65,1	33,72	5,84	3
(CH ₃) ₂ O	400,2	1255	62,7	3188	52	30,65	6,18	9
(CH ₃ · C : CH	402,6	1085	54,1	3710	1 —	—	4,95	7
NH ₃	406	1380	68,45	2942	13	38,95	5,21	4
i(CH ₃) ₃ CH	406,8	1027	50,9	3961	36,5	33,36	5,71	14
CH ₃ Cl	416,17	1512	74,1	2752	65,89	35,64	5,97	5
Cl ₂	417,1	1839	90,0	2268	76	33,27	5,47	2
C ₂ H ₅ · CH : CH ₂ α	(418,5)	1087	53,1	3850	—	—	5,59	12
i(CH ₃) ₂ · C : CH ₃	423,8	1137	55,2	3727	—	—	5,78	12
HJ	423,8	2640	128,2	1605	—	—	7,71	2
n · C ₄ H ₁₀	426,3	1078	52,2	3954	35,7	35,82	5,71	14
(CH ₃ · CH) ₂ β	(430)	1100	53,0	3909	—	—	5,52	12
SO ₂	430,6	1879	90,5	2291	77,65	35,46	6,13	3
HCN	456,6	1257	58,8	3632	53,2	47,45	3,86	3
i(CH ₃) ₂ C : CHCH ₃	464,7	1113	51,6	4175	33,9	35,35	5,53	15
CH ₃ Br	467,1	2115	97,9	2208	—	—	7,44	5
CH ₂ Cl ₂	518,2	1752	77,0	2957	—	—	5,56	5
HCCl ₃	531,9	1780	77,2	2988	54,9	32,10	5,50	5
CCl ₄	(547)	1750	74,8	3125	—	—	5,26	5
Cyklohexan	553,1	1282	54,5	4314	—	—	5,66	18
C ₆ H ₆	561,6	1423	60,0	3946	47,89	35,09	5,46	12
Br ₂	575,3	2958	123,3	1944	—	—	6,37	2
Thiophen	590,4	1700	70,0	3472	47,7	40,84	5,64	9
SnCl ₄	591,8	2010	82,6	2944	36,95	32,61	5,59	5
Toluol	593,7	1403	57,6	4231	41,6	35,31	5,46	15
CH ₃ COOH	594,7	1715	70,3	3467	57,11	43,28	5,48	8
CH ₃ -Thiophen	(605)	1544	62,7	3918	—	—	5,49	12
Thiazol	(609)	1700	68,9	3582	—	—	5,31	8
Pyridin	617,3	1570	63,2	3931	60	31,3	5,33	11
H ₂ O	647,3	2283	89,7	2835	217,5	43,74	4,95	3
J ₂	787	3615	128,8	2177	—	—	5,69	2

Abgesehen von den abnormsten Kennbrüchen (H₂O, HCN, NH₃, NO, Cl₂) folgen sich die T_k je bei gleicher Atomzahl in der Reihenfolge der Molgewichte, wobei die z je ein wenig zu fallen pflegen mit steigendem Molgewicht, doch dies mit vielen Ausnahmen.

2. Wir wollen zuerst nur die *Funktion* z betrachten:

Sehen wir von He und Ne ab, so haben wir für z folgende, nur die Stoffe mit abnormem Kennbruch auslassende Regeln:

1 atomig	Mittel	
2	8,15	(3)
2	7,14	(11)
3	5,80	(6)
4	5,30	(2)
5	5,95	(8)
6	5,94	(1)
7	4,95	(1)
8	5,54	(3)
9	5,84	(4)
11	5,47	(2)
12	5,57	(5)
14	5,71	(2)
15	5,50	(2)
18	5,66	(1)

Das Mittel aus allen 37 mehr als zweiatomigen Gasen ist $5,70 = z\text{-Mittel}$ (Mittel der Molgewichte 66,5).

Abweichungen nach oben kommen durch Edelgasanalogien zustande, solche nach unten durch unvollkommene Absättigung, die den Wirkungsbereich des Molekularfeldes vergrößert. Die kleineren Abweichungen machen etwa ± 5 v. H. aus und sind jedenfalls zu nicht unbeträchtlichem Teil auf Meßfehler und auf Verschiedenheiten in der Vergleichbarkeit der Zahlen (Wahl der Luftnormale; Korrektionsglieder) zurückzuführen. Wir dürfen daher die von fremden Autoren stammenden Zahlen weder untereinander, noch mit unseren Zahlen verbunden, zu sehr mit Schlüssen belasten.

Die nach solcher Kritik verbleibenden, sicher bestehenden Unterschiede zwischen den einzelnen z hängen ausgeprägt vom Stoff ab. Lassen wir jetzt He beiseite und prüfen die anderen Gase:

1. Die *Größenreihe*. Die höchsten z haben die beiden paramagnetischen Gase O_2 und NO und die Edelgase, CO, HBr, HJ, dann die anderen zwei- und mehratomigen Gase; zuletzt die mit abnormem Kennbruch T_k/MN .

2. *Periodizitäten* treten sicher hervor, in den Vertikalenreihen des periodischen Systems, wie in den Homologenreihen.

a) Die *Elemente, edelgasartigen Hydride und ihre Homologen* geben das Bild:

—	—	—	H-H 5,67 (6,84)	—	He 18,69
		—	—	—	Ne 15,89
N ₂ 8,21	O ₂ 9,27	—	—	—	—
CO 7,91	NO 8,32	Cl ₂ 5,47	HCl 6,08	CH ₃ Cl 5,97	Ar 8,24
		Br ₂ 6,37	HBr 7,85	CH ₃ Br 7,44	Kr 8,45
		J ₂ 5,69	HJ 7,71	—	X 7,76

Die Halogene haben je etwa 0,7 vom entsprechenden Edelgas.

b) Die Kohlenwasserstoffe, ihre Chlorsubstitutionsprodukte und die mehratomigen Hydride lassen eine Reihe sicherer Regeln bereits feststellen:

CH ₄ 5,77	NH ₃ 5,21	OH ₂ 4,95	(FH)	Ne 15,89
SiH ₄ 6,49	N : CH 3,86	—	ClH 6,03	Ar 8,24

In der Ar-Periode (zu der natürlich das Raumerparnis wegen hier untergebrachte HCN nicht gehört, sind alle Werte cet. par. größer als in der Ne-Periode, um so weniger, je weiter nach links. Die Kleinheit des z von HCN hat mit der dreifachen N-C-Bindung zu tun.

H ₂ 5,67	CH ₄ 5,77	CH ₃ Cl 5,97	CH ₂ Cl ₂ 5,56	CHCl ₃ 5,50	CCl ₄ 5,26	Cl ₂ 5,47	—
—	C ₂ H ₆ 5,83	C ₂ H ₄ 5,94	—	C ₂ H ₂ 5,33	C ₂ H ₆ 5,46	C ₂ H ₄ S 5,64	C ₂ H ₂ N 5,33
—	C ₃ H ₈ 5,61	C ₃ H ₆ 5,66	Cyкло 5,88	C ₃ H ₄ 4,95	C ₃ H ₈ 5,49	C ₃ H ₆ S 5,49	C ₃ H ₂ SN 5,31
—	ⁿ C ₄ H ₁₀ 5,71 i 5,71	C ₄ H ₈ 5,52–5,78	—	—	—	—	—
—	—	ⁱ C ₅ H ₁₀ 5,53	—	—	—	—	—
—	—	—	C ₆ H ₁₂ 5,66	—	—	—	—

Bei den Paraffinen gibt das 0te, 2te usf., kurz die geraden Glieder in C höhere z . Dasselbe ist in der Olefin- und

wohl auch in der Acetylenreihe zu sehen. Doppelbindungen scheinen z etwas, dreifache stark herabzudrücken; am stärksten wirkt (vgl. oben HCN) die dreifache C–N-Bindung. Daß der Einfluß der Atomzahl und Molekelgröße gut ausgeschieden ist, zeigt Vergleich z. B. von Propylen mit Cyklohexan. Stickstoff, vollends, wo er prozentual stark vertreten, erniedrigt, während S (Übergang zur Ar-Reihe) z erhöht. Doch gehen diese Einflüsse etwa nach Atomprozenten, wie die zwischen H_2 bzw. CH_4 und Cl_2 ausgespannte Substitutionsreihe zeigt.

Sehen wir uns zum Schluß noch Substitutionen für O-Atome an. Wegen des extrem hohen z für O_2 selbst wird man bei solchen Substitutionen Erniedrigungen erwarten, und das trifft auch zu:

H_2O	CO_2	N_2O	O_3
4,95	6,94	6,98	—
$(CH_3)_2O$	COS	—	SO_2
6,18	5,84		6,13
—	CO	NO	—
	7,91	8,32	
	OO		
	9,27		

Ob C oder S substituiert wird, z erniedrigt sich.

Ebenso fällt z bei N-Substitution, einerlei, ob durch C oder CO.

Übergang zu substituierenden Atomen aus dem mehr links oder unten liegenden Teil des periodischen Systems erniedrigt also z . Da dementsprechend $CO < NO$, so muß auch, wie es ist, $CO_2 < N_2O$ sein.

3. Noch günstiger als z scheint sich aber das spezifische η_s zu verhalten, also der Bruch $\eta_s/\sqrt{T_s}$. Hier sind nicht bloß sehr ausgeprägte und nicht allzu zahlreiche Gruppen festzustellen, sondern innerhalb von ihnen besteht auch, nimmt man $1/\eta_s$, bereits Additivität in einem gewissen Maße. Und endlich lassen sich die η_s , deren reziproker Wert den $M\theta$ nahesteht, mit Atomgewichten, Quanten- und Ordnungszahlen verbinden, so daß die Art der Stufung sich durch diese Zahlen ganz oder teilweise ausdrückt.

a) Der Zahlwert η/\sqrt{T} befolgt bei den Edelgasen eine Gesetzmäßigkeit, die ihre nicht strenge Geltung wohl nur in

der Unsicherheit dieser Größe selbst (etwa $\frac{1}{2}$ v. H.) und außerdem darin hat, daß alle Edelgase außer He Isotopengemische sind. Letzteres bedingt eine Unschärfe und zugleich eine gewisse Undefiniertheit von T_k , sowie Zweifel daran, welche Funktion des Atomgewichts A statt seines arithmetischen Mittelwerts dazustehen hätte. Man findet:

$$(32a) \quad \text{für He} \quad s = \frac{\eta_k}{\sqrt{T_k}} \cdot \left(\frac{n}{A}\right)^2 \cdot Z = 5,32.$$

Berechnet man hieraus jetzt nach

$$(32b) \quad \sqrt{\frac{\eta}{\sqrt{T_k}} \cdot \frac{n^2 \cdot Z}{5,32 \cdot 2}} = A$$

die Atomgewichte der anderen Edelgase, so erhält man:

Ne	20,0	statt	20,15
Ar	39,2	„	39,9
Kr	81,5	„	82,9
X	129,4	„	130,2

und man kann danach sichtlich aus $T_k = 377,5$ und $A = 222$ bis 218 auch η_k für Emanationen berechnen, und erhält $\eta_k = 3290 - 3173$.

Derselbe Ausdruck liefert gruppenweise gleiche oder fast gleiche Zahlen auch bei den Dielementen, und bei den zweiatomigen Hydriden und Oxyden; doch kommt dabei in Betracht, daß man als Z die *Summe* der Ordnungszahlen, als n aber nur die *größere* Quantenzahl einsetzen muß, um die beste Konstanz und den einfachsten Zusammenhang mit früheren Zahlen (vor allem der He-Zahl) zu erhalten. Dann wird nach Gl. (32a) für die drei Halogene nahezu der He-Wert erhalten, ebenso für N_2 . Dagegen ist O_2 bereits sicher größer, und H_2 erst recht:

—	—	H_2	He	—
		6,49	5,32	
N_2	O_2	F_2	Ne	—
5,31	5,61	—	10,47	
—	—	Cl_2	Ar	HCl
		5,47	10,30	10,69
—	—	Br_2	Kr	HBr
		5,41	10,28	10,63
—	—	J_2	X	HJ
		5,30	10,1	10,60

Man kann rückwärts η_k für F_2 berechnen aus demselben Ausdruck und findet 106,3—109,9, also bemerkenswerterweise einen über Cl_2 liegenden Wert. Er läßt sich durch eine Analogie stützen, die man in der Horizontalen vom N_2 und O_2 her zieht. Die $\eta_k/\sqrt{T_k}$ dieser beiden Stoffe verhalten sich wie 5:6 mit erheblicher Genauigkeit, also wie ihre Nummern p in der betreffenden Periode. Zählt man daher auf F_2 mit Nr. 7 weiter, so ergäbe sich η_k selbst für F_2 mit dem dem obigen Bereich sehr naheliegenden Wert 104,2—104,7.

Je weiter man sich von dem abnormen Dreieck O_2-H_2-Ne , das man mit dem unsicheren Cl_2 auch zu einem Viereck erweitern könnte, entfernt, desto glatter sind die Dielementzahlen die Hälfte der alsdann den Edelgasen schon sehr nahestehenden Halogenwasserstoffe. Auch bei den Halogenen, insbesondere dem Cl , hat man aber Störungen zu erwarten, analog denen bei den Edelgasen selber, weil es Isotopengemische sind. Hinzu kommen noch die hier an sich nicht sehr großen Genauigkeiten der $\eta_k/\sqrt{T_k}$.

Die Abnormität des an sich extremen H_2 versteht sich. Die des paramagnetischen O_2 kann um so weniger wundernehmen, als man entsprechendes auch bei NO wahrnimmt. Während nämlich die bisherige Rechnung für CO die ganz normale Zahl 5,28, fast identisch mit $N_2 = 5,31$ ergibt, fällt NO noch über $O_2 = 5,61$ mit $NO = 6,0$. Das ist genau an derselben Stelle Abnormität wie bei den Kennbrüchen (vgl. oben, S. 204 u. 205), die für NO 3,0 und für H_2 8,26 geben.

b) Glatter noch als mit (32a) arbeitet die noch einfachere Funktion i :

$$(33) \quad i = \frac{\eta_k}{\sqrt{T_k}} \cdot \left(\frac{\sum n}{\sum Z} \right)^x,$$

worin x je nach der Gruppe entweder gleich 1 oder gleich $\sqrt{2}$ ist.

1. Edelgase $x = 1$. Bei He und Ne ist i auf 1,5 v. T. identisch. Bei Ar , Kr , X fällt es dann gesetzmäßig. Dieses Fallen unterbleibt, wenn man die i mit einfachen Faktoren multipliziert, die die Nebenquantenzahl L enthalten und auf die gefüllten Schalen Bezug haben, sowie auf das, was in den noch nicht abgeschlossenen fehlt.

Da Helium und Neon abgeschlossene Schalen haben, so kann man den Faktor 1 bei beiden verstehen und ihn so schreiben:

$$\text{He} = (2(2 \cdot 0 + 1))/2 = 2/2 = 1,$$

$$\text{Ne} = (2(2 \cdot 0 + 1) + 2(2 \cdot 1 + 1))/8 = 8/8 = 1.$$

Denn entsprechende Ausdrücke lassen sich zur Darstellung bei den drei anderen Gasen verwenden.

Man kann hier entweder jeweils den Bruch:

$$\frac{\text{Kommende volle Schale} - \text{vorhandene partielle Schale}}{\text{vorhandene partielle Schale}}$$

nehmen. Damit hat man, bezogen auf die *M*-Schale:

$$\text{Ar} = i \cdot \frac{18 - 8}{8} = i \cdot 10/8 \text{ stimmt bereits mit der gemessenen Zahl.}$$

Für Kr gibt:

$$\frac{\text{Kommende volle } N\text{-Schale} - \text{vorhandene volle } M\text{-Schale}}{\text{vorhandene volle } M\text{-Schale}} = \frac{14}{18}.$$

Für X wird:

$$\frac{\text{Kommende volle } N\text{-Schale} - \text{vorhandene volle } M\text{-Schale}}{\text{kommende volle } N\text{-Schale}} = \frac{14}{32}.$$

Das ist bei Kr gerade die Hälfte, bei X gerade ein Viertel des gefundenen Zahlwerts; was doch kaum Zufall sein wird. Setzt man die Zahlen ein, so bekommt man folgende Werte, die identisch sein müßten, wenn sowohl die Messungen wie die Berechnungsansätze genau wären:

$$\text{He} = 21,29,$$

$$\text{Ne} = 21,26,$$

$$\text{Ar} = 21,10,$$

$$\text{Kr} = 21,22,$$

$$\text{X} = 21,40.$$

Man darf zugeben, daß die Übereinstimmung mit dem Mittel 21,25 sehr gut ist, und daß die Abweichungen bestimmt in die Fehler fallen. Das ist deshalb von Interesse, weil die dafür benützten Ansätze im Gegensatz zu Gl. (32) keine Massen mehr enthalten.

Haben sich bei der soeben benützten Funktion (33) mit $x = 1$ die beiden ersten Edelgase allein ganz einfach verhalten, so tun es allein die drei letzten, wenn man einfach η_k selbst durch die Wurzel aus dem Atomgewicht dividiert:

$$\text{Ar} = 196,7; \quad \text{Kr} = 195,5; \quad \text{X} = 197,0.$$

2. Zwei- und dreiatomige Gase (dazu NH_3 und CH_4). Bei diesen ist die $\sqrt{2}$ te Potenz für x zweckmäßig. Damit kommt man zu folgenden Gruppen:

I		II				III		IV		V		VI	
H ₂	26,38	NO	13,90	N ₂	12,63	SO ₂	10,55	Cl ₂	7,76	Br ₂	5,76	J ₂	4,58
H ₂ O	23,67	N ₂ O	13,91	CO	12,54	HCl	10,48	HBr	7,43	HJ	5,75	—	—
H ₂ N	25,67	CO ₂	13,72	O ₂	12,53	COS	10,24	—	—	—	—	—	—
CH ₄	23,51	HCN	13,72	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Übergewicht des Wasserstoffcharakters führt in Gruppe I, worin die Abnormität von H₂O ganz verschwunden ist, die von NH₃ wohl z. T. auf Unsicherheit zurückgeht.

In Gruppe II sind allein oder überwiegend (HCN) Atome mit $n = 2$ enthalten, in Gruppe III je ein Atom mit $n = 3$, in IV zwei mit $n = 3$ oder eines mit $n = 4$, in V zwei mit $n = 4$ oder eines mit $n = 5$, in VI zwei mit $n = 5$.

H₂O und CH₄ sind in den Fehlern einander gleich. Desgleichen NO = N₂O; CO₂ = HCN; CO = O₂, vielleicht auch = N₂; doch macht der Unterschied zwischen N₂O und CO₂ einen entsprechenden von CO und N₂, der sich ja auch andeutet, sehr wahrscheinlich. SO₂ ist mit HCl fast identisch, Cl₂ wohl ebenso mit HBr (letztere beiden Zahlen sind nicht gut vergleichbar), Br₂ mit HJ, J₂ mit der H-Verbindung des noch unbekannten Halogens.

Multipliziert man die Gruppen der letzten Tabelle der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, die teilweise wirklich, teilweise genähert die mittleren Hauptquantenzahlen dafür sind, so rücken die Zahlen alle ganz nah zusammen:

I		II				III		IV		V		VI	
H ₂	26,38	NO	27,80	N ₂	25,26	SO ₂	21,10	Cl ₂	23,28	Br ₂	23,04	J ₂	22,90
H ₂ O	23,67	N ₂ O	27,82	CO	25,08	HCl	20,96	HBr	22,28	HJ	23,00	—	—
NH ₃	25,67	CO ₂	27,44	O ₂	25,06	COS	20,48	—	—	—	—	—	—
CH ₄	23,51	HCN	27,44	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Es ist natürlich leicht möglich, durch geeignete ausprobierte Mittelungen die Übereinstimmung noch verblüffender zu machen. Aber wir wollen dies zurückschieben, bis unsere Messungen sich auf mehr verschiedene Gase erstrecken. Daß hier ganz einfaches und wahrscheinlich ein strenger Anschluß an die Zahlenschemata der Quantenzahlen sich finden läßt — gerade weil wir jede mechanisch-geometrische Angabe über die Molekeln vermieden haben — dürfte wohl erkennbar sein.

3. Eine Übersicht über die Kohlenwasserstoffe mit $\sqrt{2}$ ergibt i mit

H ₂	26,38	Olefine	Cyko-Ol.	Acetylene	
CH ₄	23,50				
C ₂ H ₆	23,35	C ₂ H ₄	21,53	C ₂ H ₂	18,56
C ₃ H ₈	21,42	C ₃ H ₆	20,55	C ₃ H ₄	17,74
n-C ₄ H ₁₀	21,22	α C ₄ H ₈	19,91		
		β C ₄ H ₈	19,88		
i-C ₄ H ₁₀	20,70	γ C ₄ H ₈	20,70		
		i C ₅ H ₁₀	19,35		
			C ₆ H ₁₂	20,25	
					CH ₃ COOH 17,50
				Benzol-K.	
					C ₆ H ₅ N 17,60
					C ₆ H ₅ S 15,28
					CH ₃ ·C ₆ H ₅ S 15,10
					C ₆ H ₅ SN 13,64

Man sieht daraus den ganz vorherrschenden Einfluß der prozentischen Zusammensetzung aus H ($n = 1$) und C ($n = 2$), und den Einfluß von S ($n = 3$). Während die Bindungsweise zwar sichtlich etwas mitspielt, doch nur wenig; und dies Wenige ist wegen der unsicheren Belastbarkeit vieler Zahlen noch nicht diskussionsreif.

Neben Propan kann man Dimethyläther stellen, der Unterschied bleibt sogar ungewiß.

$$\text{CH}_3 \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{CH}_3 = 21,42$$

$$\text{CH}_3 \cdot \text{O} \cdot \text{CH}_3 = 21,03$$

Neben Methan fällt SiH₄ tiefer; aber der große H-Gehalt macht die Zahl größer.

$$\text{CH}_4 = 23,50$$

$$\text{SiH}_4 = 17,15$$

Halogensubstitution im CH₄ gibt die Tabelle:

$$\text{CH}_4 = 23,50$$

$$\text{CH}_3\text{Cl} = 14,31 \quad \text{CH}_3\text{Br} = 10,37$$

$$\text{CH}_2\text{Cl}_2 = 10,1$$

$$\text{CHCl}_3 = 8,32$$

$$\text{CCl}_4 = 7,12 - \text{Cl}_2 = 7,76$$

.

$$\text{SnCl}_4 = 5,22_8$$

Für die reziproken i besteht hier eine ganz befriedigende Additivität, doch ähnlich wie bei den Kohlenwasserstoffen, so

daß die Differenzen paarweise etwa gleichbleiben, und dazwischen springen:

CH_4	CH_3Cl	CH_2Cl_2	CHCl_3	CCl_4	
42,6	69,9	99,1	120,2	140,6	= 1000/i
27,3	29,2	21,1	20,4	Differenz.	

Man kann aus diesen Zahlenreihen praktische Regeln für die Vorausberechnung von $\eta_k/\sqrt{T_k}$ für noch ungemessene Gase leicht entnehmen.

Man kann auch versuchen, die bei den Edelgasen erhaltenen Quantenzahlbeziehungen auf die mehratomigen Gase auszudehnen. Doch wird das letztere unsicher bleiben und leicht zu Irrtümern führen, weil heute die Vergleichbarkeit und Zuverlässigkeit der Zahlen noch recht verschieden und oft nicht mehr feststellbar ist.

Es wäre sehr zu hoffen, daß die vielen wertvollen Messungen, die zur Zeit von den verschiedensten Seiten angestellt werden, von den Autoren mit leicht ersichtlichen Vermerken versehen würden, woraus sich ersehen ließe, wie und welche Korrekturen angebracht, und auf welchen Normwert (z. B. Millikan) die η bezogen sind. Dies wäre zur Förderung des ganzen Gebiets sehr nützlich.

Sobald es gelingt, $\eta_k/\sqrt{T_k}$ zuverlässig und nicht etwa über die unzuverlässigen „Querschnitte“ mit spektroskopischen Daten sicher zu verknüpfen, werden die noch verbliebenen Störungen beseitigt, und die schon vorhandenen merkwürdigen Gruppengleichheiten der angeführten Zahlen vielleicht auch Deutungen zugänglich sein.

b) Die Vorausberechnung von η_k aus Additivitäten

Hierzu bedarf man einmal möglichst genauer η_k -Werte; andererseits hat man eine Funktion von η_k aufzusuchen, die sich innerhalb der Fehler als additiv erweist, was natürlich bei nicht kolligativen Eigenschaften auf die Dauer stets möglich ist.

Diese Aufgabe ist mit dem heutigen Meßmaterial noch nicht hinreichend sicher zu bearbeiten (Unvergleichbarkeit, bei Wichtigkeit kleiner Unterschiede). Deshalb geben wir hier nur eine Skizze und müssen für Genaueres unsere weiteren Messungen abwarten.

Genäherte Additivität zeigt bereits T_k/η_k . Es ist deshalb in Tab. 5 wiedergegeben. Man sieht, daß es mit steigender Atomzahl N im allgemeinen wächst.

Wir beginnen sachgemäß mit den Kohlenwasserstoffen und vergleichen ihre $T_k/10^3\eta_k$:

Tabelle 6

H ₂	2182	670	H ₂	2182	H ₂	2182	Cykl.	Benzol-Der.
CH ₄	2852	409	C ₂ H ₄	2928	556	CH		
C ₂ H ₆	3261	482	C ₂ H ₄	3484	366	C ₂ H ₄	2876 834	
C ₃ H ₈	3743	211	C ₃ H ₆	3850	325	C ₃ H ₆	3710	
n-C ₄ H ₁₀	3954		C ₄ H ₈	4175				
(i-	3961)							
							C ₃ H ₈ 3351	
							Mittel 321	
							C ₆ H ₁₂ 4314	
								C ₆ H ₆ 3946 283
								C ₇ H ₈ 4231

± 15 mindestens ist hier Fehlergrenze.

Bei den niederen Paraffinen tritt der Knickeffekt am Molekül noch deutlich in der Periodizität der Unterschiede hervor; sie konvergieren auf einen Wert, der von dem Betrag rund 320 der anderen Reihen nicht viel verschieden ist. Doppelbindung und dreifache Bindung verringern, doch um so weniger, je größer das Molekül.

Man kann also rund 300 als CH₂-Äquivalent bei größeren Molekeln betrachten. Bei kleineren Molekeln (CH₃Cl gegen HCl; CH₄ gegen H₂; C₂H₄ gegen C₂H₂; sogar noch einigermaßen C₃H₆ gegen C₂H₄) liegt der Unterschied in Gegend von 600—800.

Chlorsubstitution im Methan führt für je ein Cl statt ein H zu rund 48 Zuwachs. Nur das erste Glied CH₃Cl, als HCl- und damit Argonanalogon ist kleiner als berechnet:

CH ₄	CH ₃ Cl	2900 ber.	2752 gef.
CH ₃ Cl	CH ₂ Cl ₂	2948	2957
CH ₂ Cl ₂	CHCl ₃	2996	2988
CHCl ₃	CCl ₄	3144	3125

CH₄ 2852 ist sogar größer als CH₃Cl, infolge des Edelgas-effekts beim letzteren. Ebenso und noch stärker CH₃-CH₃Br mit 644, und ähnlich H₂-HBr mit 603 Unterschied. Ähnlich auch H₂-HCl mit 146 usf.

Für N, S, Si und Sn liegen auch Hinweise auf der-artiges vor.

Die einfachen Oxyde sind zu kleine Molekeln, als daß man bei ihnen schon glatte Additivitäten oder einfache Periodizitäten erwarten dürfte. Immerhin berechnet man doch bereits aus O_2 und N_2 das NO mit 1423 statt 1489, aus CO das CO_2 mit 2236 statt 2022, das N_2O mit 2176 statt 1985, das COS aus SO_2 mit 2522 statt 2404 usf.

Wir wollen dies nicht weiter ausführen. Man sieht bereits an diesen wenigen Beispielen hinreichend, welche Möglichkeiten der η_k -Voraussage die Tabellen eröffnen, welche nicht.

c) Absolutwert von η_k und Übereinstimmungstheorem

Versagte das Theorem bereits für den Temperaturkoeffizienten, wie es bei seiner längst nachgewiesenen Ungültigkeit nicht anders zu erwarten war, so gab es dort auch nur eine sehr schlechte, zumeist ganz unbrauchbare Näherung. Das liegt nur wenig besser bei den Absolutwerten von η .

Für sie gibt das Theorem die Forderung, daß

$$(34) \quad W = \eta \cdot \sqrt[6]{\frac{T_k}{M^3 \cdot p_k^4}}$$

für alle Stoffe gleich sei; das sollte doch nun wenigstens für T_k selbst am ehesten gelten. Man sieht denn auch aus Tab. 5, daß zwar viele Werte nahe beieinander liegen, insbesondere für wenigatomige Gase (wo man ihrer am wenigsten bedarf, weil man da Messungen hat); weiter zeigt sich, daß einige der stärksten Ausnahmen an den Störungsstellen von z , bei abnormen Kennbrüchen auftreten. Aber alles in allem hat man doch bei mehratomigen Molekeln mindestens dieselbe Schwankungsgröße wie bei den vom oft unsicheren p_k ganz unabhängigen z , und häufig eine größere, deren Grund nicht abzusehen ist. Während z. B. Essigsäure bei z ganz normal ist, zeigt sich ihre Polymerisationsstörung bei W , und ähnlich wird es oft sein.

Zusammenfassung

1. Alle vorliegenden η -Messungen werden kritisch zu Kurven vereinigt, ausgeglichen, die ersten T -Koeffizienten daraus entnommen, ebenfalls ausgeglichen.

2. Sie liefern das Ergebnis, daß ausnahmslos

$$m = \frac{d \ln \eta}{d \ln T} = 1 \text{ für } T = T_k \text{ ist.}$$

3. Die Auffassung wird entwickelt, daß T_k für alle idealen Gase der „Mittelpunkt“ des „Isomeren“-Gleichgewichts der $T = 0$ -Form und der Hochtemperaturform sei, d. h. jener Punkt, wo beide Formen in gleichen Mengen zugegen sind.

4. Der η -Wert der Hochtemperaturform ist, wie die Erfahrung jetzt zeigt, nicht allgemein, wie gewöhnlich klassisch angenommen \sqrt{T} proportional, sondern bei den wenigatomigen Gasen proportional zu Werten zwischen T bis \sqrt{T} . Bei H_2O , HCN , NH_3 am höchsten, bei He , H_2 tiefer, noch tiefer bei Gasen bis etwa $T_k = 200$. Erst bei vielatomigen Gasen wird voraussichtlich streng der Grenzwert $T^{1/2}$ erreicht. $^{1/2}$ heißt daher *Minimum des Grenzexponenten*.

5. Die Mischungsvorstellung für T_k führt, unter Berücksichtigung der translatorischen Molwärme $C_v = \frac{3R}{2}$ zur Kenntnis der, wie es an Hand des heutigen Materials scheint, allgemeinen Temperaturfunktion von η , die sich für

$$\frac{d \ln \eta}{d \ln T} = m$$

einfach angeben läßt; sie bestätigt sich an der Erfahrung dadurch, daß der Grenzexponent m_g sich als konstant ergibt. Man findet ihn zu

$$m_g = \frac{m - (2 - m)(T_k/T)^{3/2}}{1 - (T_k/T)^{3/2}}$$

und er ist mit dem Grenzwert des T -Exponenten in $\eta = a T^n$ identisch, während sich n vom m im allgemeinen natürlich unterscheidet und mit ihm durch eine beiderseits benützbare bekannte Funktion verknüpft ist.

6. In der Temperaturgleichung $\eta = a \cdot T^n$ setzen wir $a = \eta_k / T_k$. Es wird gezeigt, daß die Veränderlichkeit des n mit Stoff und Temperatur mit dem Übereinstimmungstheorem nicht in Einklang steht, und daß auch dessen Aussage über Konstanz von $\eta \cdot \left(\frac{T_k}{M^3 \cdot p_k^4} \right)^{1/2}$ selbst für η_k nicht gilt.

7. Für die spezifische (d. h. auf gleiche Geschwindigkeit bezogene) kritische Gasreibung $\eta_k / \sqrt{T_k}$ gelten bei den Edelgasen, mindestens bei den beiden mit endgültig abgeschlossener Schale, Helium und Neon, ganz einfache Beziehungen zu Ordnungszahl und Hauptquantenzahl. Bei anderen Gasen

kann man eine Funktion der beiden letzteren und von $\eta_k/\sqrt{T_k}$ finden, die selbst für die kleinen wenigatomigen Molekeln sehr nahe am selben Zahlwert bleibt. Die Gruppenbildung der Zahlwerte ist bei Funktionen von $\eta_k/\sqrt{T_k}$ ganz besonders scharf.

8. Für große und vielatomige Molekeln eignet sich eine andere Funktion z , mit einem empirischen Exponenten, noch besser. Sie hat im Mittel den Zahlwert 5,70, vermöge der bloßen η -Meßfehler und T_k -Ungewißheiten unsicher um $\pm 0,1$ mindestens. Sie ist gut konstant für die Mehrzahl der Gase und erlaubt also η_k genähert vorauszusagen, namentlich für mehratomige Gase. Die Funktion enthält bezeichnenderweise nur T_k und eine konstante Potenz der Atomzahl. Sie zeigt voraussehbare Störungen vor allem dort, wo der schon für die Voraussagung von m_g benützte „Kennbruch“ T_k/MN (M = Molgewicht, N = Atomzahl) abnorm große Werte hat. Dieser Bruch bleibt bei normal liegenden T_k unter 2,5. Die Funktion z kann qualitativ durch Wirkungsquerschnitte gedeutet werden und hat daher sehr vom Molekelbau beeinflusste Störungen, die auch zu regelmäßigen Periodizitäten führen.

9. Umgekehrt kann man, statt alle η_k vermöge z zusammenzubiegen, sie in einer etwa mit N steigenden Funktion ausbreiten, die sich mehr oder minder additiv aufbauen läßt. Schon mit T_k/η_k (dem Querschnitt proportional) gelingt dies einigermaßen, mit sehr deutlich wahrnehmbaren Störungen vom Molekelbau her; doch reicht Breite und Vergleichbarkeit des Zahlenmaterials noch nicht hin, um dies aussichtsreiche Verfahren hinreichend sicher auszubauen.

10. Damit ist es möglich geworden, bei Kenntnis eines zuverlässigen η -Werts η für alle Temperaturen darzustellen bei solchen Gasen, wo man zu den Grenzexponenten kommen kann, und soweit man dieser sicher ist. Bei Kenntnis von zwei oder mehr η -Werten können die Grenzexponenten und also die ganze η - T -Kurve bereits sicher bestimmbar werden. Ohne Kenntnis eines η -Werts kann man doch aus den bereits bekannten Regeln für η_k einen guten Näherungswert für η_k voraussagen und so die Kurve aufbauen. Unzugänglich sind einstweilen aber noch diejenigen Gase, worin Elemente vorkommen, die man weder selbst, noch in Verbindungen bis jetzt

untersucht hat, oder wo man keine hinreichenden Angaben über die kritische Temperatur machen kann. Denn dies ist die einzige Größe außer der chemischen Formel (Molgewicht), deren man zu unseren Berechnungen bedarf.

11. Die Sutherland-Reinganzumfunktion, die theoretisch nur für Gebiete nicht zu nahe bei T_k zu gelten beansprucht, hat von dem hier vorteilhaftesten, dem kritischen Gebiet, abgelenkt. Sie, wie die Maxwellsche Funktion, bedurften einer absoluten und einer Temperaturkonstanten. Beide sind, in der Form der Maxwellschen Funktion, aber ganz unabhängig von ihrer Deutung, in vorliegender Arbeit voraussagbar gemacht, und das theoretische Verfahren durch ein ganz anderes, einfacheres und mehr induktives ersetzt.

Heidelberg, Physikal.-Chemisch. Institut der Universität,
28. Juni 1931.

(Eingegangen 20. Juli 1931)

Über die Messung der Schwingungsamplitude fester Körper

Von Georg v. Békésy

(Mitteilung aus dem K. ung. Telegraphentechnischen Versuchsamte, Budapest)

(Mit 3 Figuren)

Die Messung der Schwingungsamplitude eines festen Körpers bietet in den wichtigsten Fällen, wie z. B. bei den Schwingungen eines Geigenkörpers, eines Klavierbodens, einer Lautsprechermembran usw., noch bedeutende Schwierigkeiten, da die geringste Belastung mit irgendeiner Meßvorrichtung meist eine deutlich hörbare Veränderung des Schwingungszustandes bewirkt. Von den bekannten Meßmethoden ist wohl die von H. Backhaus¹⁾ verwandte in dieser Beziehung die günstigste, da bei ihr lediglich die etwa 0,8 cm große Belegung eines Meßkondensators auf den Schwingungskörper aufgeklebt wird.

Leider sind die meisten Schwingungszustände derart verwickelt, daß eine sehr große Zahl von Meßkondensatoren aufgeklebt werden muß, besonders wenn man etwa die Kurven gleicher Schwingungsamplitude oder Phase aufnehmen will. In diesem Falle wird die Methode etwas umständlich, abgesehen davon, daß oft, wie z. B. bei einer Meistergeige, das Aufkleben der Belegungen nicht gestattet wird.

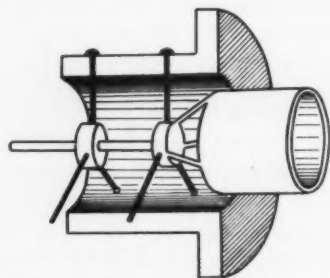
Es gelingt jedoch, diese Schwierigkeiten zu vermeiden.

Berührt man nämlich mit einem Tastkörper den zu untersuchenden Schwingungskörper, so wird sich dessen Schwingungszustand im allgemeinen stets ändern, nur dann nicht, wenn bereits der Tastkörper Schwingungen ausführt, deren Amplitude und Phase mit denen des Schwingungskörpers an der Berührungsstelle vollkommen übereinstimmt. Denn solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird, überlagern sich die

1) H. Backhaus, Ztschr. f. Phys. 62. S. 143. 1930.

Schwingungen und die statischen Deformationen ungestört, so daß durch den statischen Druck des Tastkörpers nur das statische Gleichgewicht, nicht aber der Schwingungszustand, geändert wird.

Will man daher die Schwingungsamplitude an irgendeiner Stelle bestimmen, so hat man die Amplitude und Phase des Tastkörpers solange zu verändern, bis bei einer Berührung mit dem Schwingungskörper der Schwingungszustand des Körpers oder, was auf das gleiche hinauskommt, der des Tastkörpers sich nicht ändert.



Parallelführung des Tastkörpers

Fig. 1

Als Tastkörper wählt man am zweckmäßigsten die Tauchspule eines elektrodynamischen Lautsprechers, die mit einem entsprechenden Fühlstift versehen wird, der, wie die Fig. 1 zeigt, durch 6 dünne Stahldrähte derart befestigt ist, daß er nur Parallelverschiebungen ausführen kann.

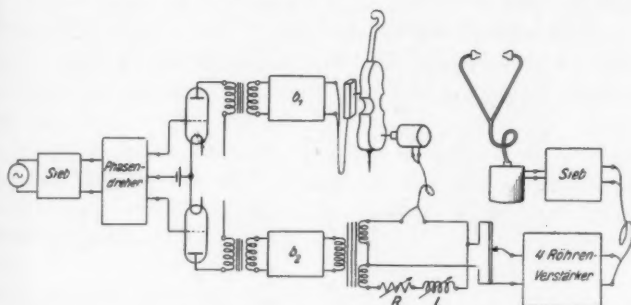
Den Schwingungszustand dieser Spule kontrolliert man am besten elektrisch, da jede Veränderung gleichzeitig die Impedanz des elektrodynamischen Systemes ändert, was in einer Wechselstrombrücke leicht festgestellt werden kann.¹⁾ Man stellt daher bei freischwingendem Tastkörper den Widerstand R und die Selbstinduktion L in Fig. 2 so ein, daß über dem Verstärker und dem Sieb ein vollständiges Tonminimum erhalten wird. Dann wird die geringste Berührung des Tastkörpers mit einem Faden oder dergleichen schon deutlich durch einen Ton angezeigt.

Die Schwingungsamplitude des Tastkörpers stellt man mit der Eichleitung b_2 ein. Durch geeignete Wahl der Stahldrähte in Fig. 1 gelingt es leicht, das elektrodynamische System so herzustellen, daß seine Impedanz bis zu Schwingungsamplituden von 0,05 mm sich höchstens um 0,5 Proz. ändert, so daß bei

1) Vgl. auch E. Gerlach, Wiss. Veröffentl. a. d. Siemens-Konz. Bd. III 1. S. 139. 1923.

Verstellen der Eichleitung b_2 nur ein geringes Nachstellen des Widerstandes und der Selbstinduktion in der Brücke nötig ist. Es bleibt somit auch die Proportionalität zwischen Strom und Schwingungsamplitude bis zu Amplituden von 0,05 mm mit der gleichen Genauigkeit erhalten.

Man kann daher bei dieser Maximalamplitude für die verschiedenen Frequenzen die Schwingungsamplitude des Tastkörpers unmittelbar mit einem Mikroskop eichen, indem man ohne Verändern der Schaltung die Dämpfung der Eichleitung



Anordnung zur Aufnahme der Kurven gleicher Schwingungsamplitude und Phase

Fig. 2

so lange verkleinert, bis diese im Mikroskop gut meßbare Schwingungsamplitude erreicht wird. Die kleineren Amplituden stellt man dann durch Erhöhen der Dämpfung her.

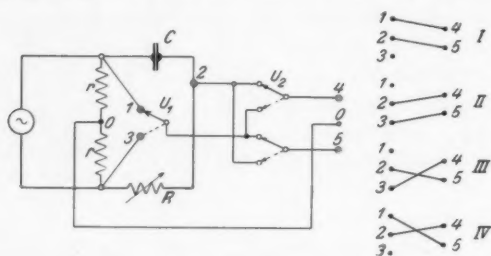
Bei elektrodynamischen Lautsprechern ist die Nichtlinearität wegen der Eigenschaften der Papiermembran bedeutend größer.

Den zu untersuchenden Schwingungskörper, z. B. ein Cello, erregt man über die Eichleitung b_1 mit einem ähnlichen elektrodynamischen System dadurch, daß man die Tauchspule mit der entsprechend abgestimmten Saite oder unmittelbar mit dem Steg koppelt.

Da der Schwingungskörper meist ein ziemlich starkes Schallfeld erzeugt, das bei der Abgleichung der Brücke stört, so muß man mit einem Hörschlauch abhören, bei dem das äußere Schallfeld nicht zur Geltung kommt.

Durch Bedienung des Phasendreher und der Eichleitung b_2 gelingt es nun leicht zu erreichen, daß bei einer Berührung des Schwingungskörpers das eingestellte Tonminimum der Brücke sich nicht ändert. Man hört dann überhaupt keinen Ton, sondern nur ein Berührungsgeräusch, das auch bei ausgeschalteter Wechselstromquelle vorhanden ist. Mit einem 4-Röhren-verstärker — die Schirmung der Brücke ist in der Fig. 2 nicht eingezeichnet — lassen sich bei einer Schwingungsamplitude von 10^{-4} mm noch Amplitudenänderungen von 1—2 Proz. sehr deutlich wahrnehmen.

Will man die Kurven gleicher Schwingungsamplitude aufnehmen, so braucht man nur die Eichleitung b_2 konstant zu



Phasendreher

Fig. 3

lassen und eventuell unter Benutzung des Phasendreher den Tastkörper so längs der Oberfläche des Schwingungskörpers zu verschieben, daß das Tonminimum immer erhalten bleibt. Auf diese Weise kann man innerhalb einiger Minuten die Kurven auf dem Schwingungskörper aufzeichnen.

Da durch die Eichleitung die Schwingungsamplituden des Tastkörpers in Millimetern unmittelbar einstellbar sind, so gelingt es auch, die Kurven aufzunehmen, denen eine ganz bestimmte im voraus gegebene Schwingungsamplitude entspricht. Für den Phasenwinkel gilt genau das gleiche.

Als Phasendreher wurde die Phasenbrücke von Hausrath¹⁾ benutzt, Fig. 3, bei der durch Vergrößerung des Widerstandes R die Phase der Spannung zwischen den Punkten 0 und 2 in

1) Zitiert nach H. Tischner, E. N. T. 7. S. 192. 1930.

bequemer Weise von $0-90^\circ$ gegenüber der Spannung an den beiden gleichen Widerständen r gedreht werden kann, ohne daß sich dabei die Größe der Spannungen ändert, wenn $1/j\omega C$ gegenüber $2r$ genügend groß gewählt wird. Da für größere Phasenwinkel als 90° der Widerstand R übermäßig große und schwer herstellbare Werte annimmt, so wurde der Schalter U_2 angebracht. Mit ihm wird es möglich, die Spannung $4-0$ oder die Spannung $5-0$ gegenüber der Generatorspannung um 90° vorzudrehen, so daß die gegenseitige Phase zwischen $4-0$ und $5-0$, die für unsere Messungen in Betracht kommt, beliebige Werte in dem I. und dem IV. Quadranten annehmen kann. Durch eine Drehung einer der Spannungen um 180° mittels des Schalters U_1 werden auch der II. und III. Quadrant zugänglich.

Es ist zweckmäßig, sich einen 4 stelligen Walzenschalter herzustellen, der automatisch die in der rechten Seite der Fig. 3 dargestellten Schaltungen ausführt. Stellt man ferner den Kondensator C so ein, daß für die betreffende Meßfrequenz

$$\frac{1}{\omega C} = R_{\max}$$

ist, so daß für $R = R_{\max}$ die Phasendrehung genau 90° beträgt, so läßt sich die gegenseitige Phase der Spannungen der beiden Verstärkerröhren von $0-360^\circ$ drehen, indem man den Umschalter nacheinander in die 4 Stellungen bringt und dabei den Widerstand R nacheinander zweimal von 0 beginnend bis zu R_{\max} anwachsen und wiederum bis 0 abnehmen läßt. Der zu jedem R gehörige Phasenwinkel läßt sich ein für allemal mit einem Vektordiagramm einfach berechnen, da er wegen der obigen Einstellung des Kondensators C von der Meßfrequenz unabhängig ist.

Bei tiefen Frequenzen wird die Empfindlichkeit größer, wenn man nach dem Siebe beim Abhören einen Zerkacker anbringt. Jedoch bewährt sich auch an Stelle des Abhörens ein empfindliches Röhrenvoltmeter, besonders dann, wenn die Stärke des Schallfeldes des zu untersuchenden Schwingungskörpers stören sollte.

Die Versuche zeigten, daß Schwingungen von Filz- oder Paragummimembranen mit dieser Methode noch genau gemessen

werden konnten, besonders, wenn der Tastkörper an Stelle der Spitze etwa eine Auflagefläche von 0,5 cm Durchmesser besaß, womit die auf den Tastkörper wirkenden Störkräfte bei unrichtiger Einstellung erhöht werden.

Zusammenfassung

Bringt man zwei schwingende Körper, den zu untersuchenden und den Tastkörper, zur Berührung, so ändert sich der Schwingungszustand der beiden Körper nur dann nicht, wenn die Amplitude und Phase des Tastkörpers der des Schwingungskörpers an der Berührungsstelle gleich ist. Denn solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird, überlagern sich die Schwingungen und die statischen Druckwirkungen störungsfrei. Man braucht daher die leicht eichbaren Schwingungen des Tastkörpers nur so einzustellen, daß der am besten elektrisch kontrollierte Schwingungszustand des Tastkörpers sich bei der Berührung nicht ändert, um unmittelbar die Schwingungsamplitude und Phase des zu untersuchenden Körpers an der Berührungsstelle zu erhalten.

(Eingegangen 26. Juli 1931)

de

Meth
metri
III. E
B. A
a) Re
messu
Direk

das
Gen
die
nach
verb
zu u
Bol
Zahl
der
von
häng
Zusa

W. I
Mate

**Versuche zur Messung
der Avogadro-Loschmidtschen Zahl aus der
Brownschen Bewegung einer Drehwaage¹⁾**

Von Eugen Kappler

(Mit 11 Figuren)

Inhalt: I. Messung der Direktionskraft D nach der Gauss'schen Methode. — II. Messung des mittleren Schwankungsquadrats $\overline{\varphi^2}$. A. Photometrische Methode. B. Registrierung der Brownschen Bewegung. — III. Fehlerquellen bei der Messung von $\overline{\varphi^2}$. A. Mechanische Erschütterungen. B. Auftreten neuer Direktionskräfte. Natur der Zusatzdirektionskräfte: a) Radiometerwirkungen, b) Magnetische Direktionskraft. — IV. Absolutmessung. — V. Verbesserungen. — VI. Anhang: Versuche zur Messung der Direktionskraft eines Torsionsfadens nach magnetischer Methode.

Nachdem W. Gerlach und Lehrer²⁾ in ersten Versuchen das mittlere Schwankungsquadrat einer Drehwaage mit einer Genauigkeit von etwa 7 Proz. gemessen hatten — eine Methode, die zuerst von Smoluchowski³⁾ gerechnet wurde — und nachdem die Versuche von Gerlach allein weitergeführt und verbessert wurden, war der Zweck der vorliegenden Arbeit zu untersuchen, inwieweit diese Methode zu einer Messung der Boltzmann'schen Konstanten k bzw. der Loschmidtschen Zahl N_L geeignet ist. Die Methode besteht in der Registrierung der Brownschen Bewegung eines an einem dünnen Quarzfaden von einigen Zentimetern Länge und einigen Zehntel μ Dicke hängenden kleinen Spiegels von etwa $1\text{--}2\text{ mm}^2$ Größe. Der Zusammenhang des mittleren Schwankungsquadrats $\overline{\varphi^2}$ mit

1) Dissertation der Universität München.

2) W. Gerlach u. E. Lehrer, Naturwiss. 15. S. 15. 1927; vgl. auch W. Eggers, Ann. d. Phys. [5] 7. S. 833. 1930.

3) M. v. Smoluchowski, Vorträge über kinetische Theorie der Materie. Göttingen 1914.

der absoluten Temperatur T und der Direktionskraft D der Aufhängung ist gegeben durch:

$$(1) \quad D \overline{\varphi}^2 = k T.$$

Die Bestimmung von k erfordert also eine Messung von D , $\overline{\varphi}^2$ und T . Die Messung von T ist naturgemäß kein Problem.

Zur Bestimmung der Direktionskraft nach der Schwingungsgleichung

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D}$$

kann man grundsätzlich zwei Wege einschlagen: Man umgeht die Messung von I durch Variation von D mit Hilfe bekannter Zusatzdirektionskräfte oder man mißt I durch Variation von I mit bekannten Zusatzmassen (Gauss'sche Methode). Bei der kleinen Direktionskraft (Größenordnung 10^{-8} bis 10^{-9} abs. Einh.) erwies sich die zweite Methode als leichter und sicherer durchführbar als die erstgenannte, deren systematische Durcharbeitung im Anhang gegeben wird.

I. Messung der Direktionskraft D durch Variation von I nach der Gauss'schen Methode

Die Schwingungsdauer des Systems wird bei Belastung mit Körpern von verschiedenem Trägheitsmoment, das aus Gewicht, Größe und Form der betreffenden Körper berechenbar ist, gemessen.

Ist I_0 das Trägheitsmoment des Systems ohne Belastung,

I_m „ „ „ „ m ten Körpers,

I_n „ „ „ „ n ten Körpers,

so folgt für die Schwingungsdauern T_m , $T_n \dots$ bei ungedämpfter Schwingung

$$(2) \quad \begin{cases} T_m^2 = 4\pi^2 \frac{I_0 + I_m}{D}, \\ T_n^2 = 4\pi^2 \frac{I_0 + I_n}{D}. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$(3) \quad D = 4\pi^2 \frac{I_m - I_n}{T_m^2 - T_n^2}.$$

Man erkennt, daß in (3) sowohl I_n als auch das dazugehörige T_n mit einem größeren Fehler behaftet sein darf, wenn I_m und I_n genügend weit auseinanderliegen. Dies ist ein grundsätzlicher Vorzug dieser Methode (vgl. Anhang, S. 255).

Damit der Fehler, der dadurch entsteht, daß die Drehachse des Systems nicht genau mit der Symmetrieachse, für die das Trägheitsmoment berechnet ist, zusammenfällt, möglichst wenig ins Gewicht fällt, benützten wir Stäbchen mit kreiszylindrischem Querschnitt, die aus dünnem Kupferdraht von $\frac{15}{100}$ mm bis $\frac{35}{100}$ mm Durchmesser hergestellt wurden. Sie wurden senkrecht zu ihrer Längsachse in der Mitte aufgehängt. Das Gewicht der verschiedenen Stäbchen war ungefähr gleich, um eine eventuelle Abhängigkeit der Direktionskraft des Fadens von der Belastung zu eliminieren. Indessen konnte eine derartige Abhängigkeit nicht bemerkt werden.

Die Schwingungsdauer wurde, um die Dämpfung möglichst klein zu machen — bei Atmosphärendruck befinden sich die Systeme im aperiodischen Schwingungszustand —, im Hochvakuum gemessen (Diffusionspumpe, Kohle in flüssiger Luft, Druck: Größenordnung 10^{-5} mm Hg, mit McLeod gemessen).

Bei der Messung der Schwingungsdauer ergaben sich zunächst einige Schwierigkeiten. Es zeigte sich eine Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude derart, daß ihre Größe bei kleinen Amplituden um einen Mittelwert streute (bis zu 20 Proz.), mit wachsender Amplitude allmählich größer wurde und bei etwa 180° plötzlich sehr stark anwuchs zu einem Werte, der unter Umständen 100 Proz. größer war; bei weiterer Steigerung der Amplitude blieb dieser Wert konstant bei wesentlich geringeren Streuungen. Es lag nahe, zu vermuten, daß die bei großen Amplituden gemessene Schwingungsdauer die richtige war, aber es mußte bewiesen werden. Der bei kleinen Amplituden gemessene kleinere Wert erklärt sich, wenn außer der Torsionskraft noch andere Kräfte im Spiele sind, die die Schwingungsdauer beeinflussen. Einmal sind es unregelmäßig erfolgende Impulse durch Erschütterungen, bei ganz kleinen Amplituden schon durch Brownsche Bewegung. Andererseits sind außer der Direktionskraft des Fadens noch andere Direktionskräfte vorhanden. Diese sind verschiedener Art. 1. Das System ist etwas magnetisch — es kann z. B. mit einem kräftigen Stabmagneten gerichtet werden. 2. Das Licht der Skalenbeleuchtung erzeugte eine starke Richtkraft. Durch systematische Schwächung der Beleuchtung (Ausblenden und Schwächung der Lichtstärke) konnte erreicht werden, daß der bei kleinen Amplituden gemessene Wert allmählich sich

dem bei großen Amplituden gemessenen Wert näherte und ihm fast ganz gleich kam. Allen diesen Richtkräften ist gemeinsam, daß sie ein dem Sinus der Amplitude proportionales Drehmoment erzeugen; und darum wird es verständlich, daß bei größeren Amplituden (über 180°) nurmehr die Schwingungsdauer gemessen wird, die durch die Direktionskraft des Fadens allein gegeben ist. Es wurde daher immer mit sehr großen Amplituden gearbeitet, auch schon aus der Überlegung heraus, daß die Schwingung durch unregelmäßige Impulse um so weniger gestört wird, je größer die Energie der Schwingung ist.

Es war aber fraglich, ob dann noch das Torsionsmoment des Quarzfadens der Amplitude proportional ist. Nach Angaben der Literatur ist diese Proportionalität bei sehr dünnen Fäden bis zu einigen 1000° befriedigend. Und in der Tat wurde bei unseren Messungen — wir gingen bis zu Amplituden von etwa 10000° — keine systematische Änderung der Schwingungsdauer bemerkt.

Tabelle 1

Stäbchen	Masse $g \times 10^3$	Länge cm	Radius cm	I $g \cdot cm^2$	T	
					Min.	Sek.
1	4,727	0,5455	0,017	$1,169 \cdot 10^{-4}$	13	42
2	4,656	1,074	0,011	$4,475 \cdot 10^{-4}$	26	36
3	4,348	1,944	0,0077	$13,65 \cdot 10^{-4}$	46	56
4	4,856	2,443	0,0074	$24,15 \cdot 10^{-4}$	61	37
5	4,710	3,450	0,0059	$46,73 \cdot 10^{-4}$	86	01

Tabelle 2

Direktionskraft des Quarzfadens

Stäbchen	1	2	3	4
2	$6,976 \cdot 10^{-9}$			
3	$6,793 \cdot 10^{-9}$	$6,729 \cdot 10^{-9}$		
4	$6,984 \cdot 10^{-9}$	$6,986 \cdot 10^{-9}$	$7,226 \cdot 10^{-9}$	
5	$6,928 \cdot 10^{-9}$	$6,925 \cdot 10^{-9}$	$6,981 \cdot 10^{-9}$	$6,873 \cdot 10^{-9}$

Tab. 1 und 2 enthalten die Ergebnisse der Messung der Direktionskraft eines Fadens, an den fünf verschiedene Stäbchen gehängt wurden. Tab. 1 enthält die Versuchsdaten, Tab. 2 die durch Kombination nach Gl. (3) sich ergebenden Werte für D . Es fällt auf, daß die mit Stäbchen 3 kombinierten Werte von den anderen Werten stark abweichen. Die genaue Ausmessung dieses Stäbchens ergab eine systematische Änderung der Dicke

längs seiner Länge, und zwar war es in der Mitte um einige Prozent dünner als an den Enden. Dies ist in der Tat die Hauptfehlerquelle, die aber durch vorherige genaue Prüfung der Stäbchen ausgeschaltet werden kann.

Die Kombination (4, 5) gibt deshalb einen unsicheren Wert, weil die beiden Trägheitsmomente zu nahe beieinanderliegen.

Die Trägheitsmomente 3—5 sind übrigens schon so groß, daß bei ihnen D direkt aus Gl. (2) gewonnen werden kann, unter Vernachlässigung von I_0 , das von der Größenordnung 10^{-6} abs. Einh. war.

Der Fehler, der durch exzentrische Ankittung entsteht, ist gering. Die längeren Stäbchen (über 1 cm lang) lassen sich unschwer so ankitten, daß die Korrektur, die sich aus dem Steinerschen Satze ergibt, unter 1 Promille bleibt.

II. Messung des mittleren Schwankungsquadrats $\overline{\varphi^2}$

Mit der Anordnung nach Fig. 1 wird ein Spalt über den Spiegel des Systems auf die photographische Platte bzw. den Film abgebildet.

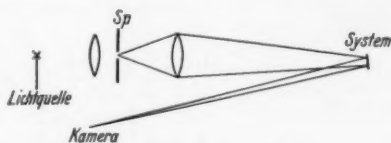


Fig. 1

Mit dieser Anordnung wurden nun zwei Methoden ausprobiert: 1. eine photometrische Methode, 2. direkte Registrierung der Schwankungen des Systems.

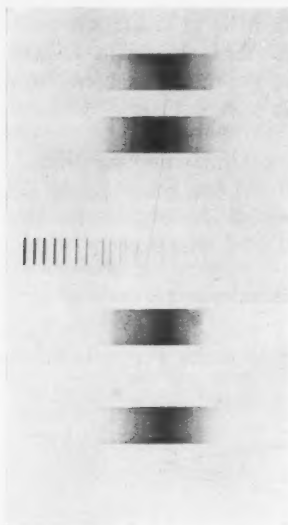
A. Photometrische Methode

Das Bild des Spaltes Sp zeichnet auf einer feststehenden photographischen Platte durch die Schwankungen des Spiegels ein Band kontinuierlicher Schwärzung¹⁾ (Fig. 2). Photometriert man dieses Band in der Längsrichtung durch, so erhält man

1) Nach einem Vorschlag von S. Goudsmit. Die gleiche Methode ist vorgeschlagen zur Messung von Ausschlägen von Galvanometersystemen, welche Brownsche Bewegung zeigen, von R. Gans, Abh. Königsb. Gel. Ges. 1931, sowie von S. Smith, Phys. Rev. 37. S. 229. 1931.

direkt die Verteilungsfunktion; das Schwärzungsgesetz der Platte muß durch Drucken von Belichtungsmarken bestimmt werden. Jedoch muß geprüft werden, ob die so gewonnene Verteilungskurve identisch ist mit der die Zeitgesamtheit des

Systems darstellenden Verteilungsfunktion, da erstere die mittlere Geschwindigkeit enthält, mit der im Mittel die einzelnen Bereiche $d\varphi$ durchlaufen werden. Diese mittlere Geschwindigkeit ist aber vom Winkel φ abhängig. Fig. 2 enthält vier Aufnahmen über die Zeitdauer von je 13 Std. mit Belichtungsmarken.



Photometrische Messung der Schwankung bei stillstehender Platte (Methode A)

Fig. 2

darstellen, können entweder gar nicht festgestellt oder höchstens vermutet werden.

Aus diesem Grunde wurde in unseren Messungen nur Methode B angewandt.

B. Registrierung der Brownschen Bewegung

In Fig. 1 tritt zwischen System und Kamera noch eine Zylinderlinse, die das Spaltbild auf einen Punkt zusammenzieht. Senkrecht zur Bewegungsrichtung dieses Lichtpunktes wird ein Film bzw. Bromsilberpapier vorbeigezogen. Auf diese Weise erhält man die Schwankungskurven der Figg. 4—6. Die Aufnahmen wurden mit einem Edelmannschen Registrierapparat hergestellt, bei welchem mit Hilfe der Zylinderlinse,

auf d
direk
Kam

maße

$x +$

bezei

punk

die e

halts

Stelle

Funk

eine

$\left(\frac{d}{d}\right)$

a ist

metri

mittl

$(x^2 =$

acht

halte

und

(4)

diese

(5)

erken

auf der im Abstand von 2 bzw. 1 mm Striche eingeritzt sind, direkt die Bereiche dx ($dx = 2 A d\varphi$; A = Abstand Spiegel — Kamera) auf den Film mit abgedruckt werden.¹⁾

Die so erhaltene Schwankungskurve wird nun folgendermaßen ausgewertet. Es wird die in jedem Bereich $x - \frac{dx}{2} \dots, x + \frac{dx}{2}$ liegende Zahl von Durchgängen, die wir mit $\left(\frac{dN}{dx}\right)_x$ bezeichnen, abgezählt, und zwar so, daß nach jedem Umkehrpunkt ein neuer Durchgang gezählt wird. Die Zahlen $\left(\frac{dN}{dx}\right)_x$, die ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an den Stellen x geben, liefern, als Funktion von x dargestellt, eine Gauss'sche Verteilung:

$$\left(\frac{dN}{dx}\right)_x = \left(\frac{dN}{dx}\right)_a \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2x^2}}$$

(vgl. Fig. 3).

a ist die Abszisse der Symmetrielage der Kurve, x^2 das mittlere Schwankungsquadrat ($x^2 = 4 A^2 \varphi^2$).

Um eine von der Beobachtungsdauer unabhängige Form der Verteilungskurve zu erhalten, dividieren wir die Zahlen mit

$$N = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{dN}{dx}\right)_x$$

und erhalten:

$$(4) \quad y = \frac{\left(\frac{dN}{dx}\right)_x}{N} = \frac{\left(\frac{dN}{dx}\right)_a}{N} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2x^2}}.$$

Das mittlere Schwankungsquadrat berechnet sich aus dieser Funktion als:

$$(5) \quad \bar{x}^2 = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} y \cdot (x-a)^2.$$

1) In Figg. 4—6 an den feinen Unterbrechungen der Kurven zu erkennen.

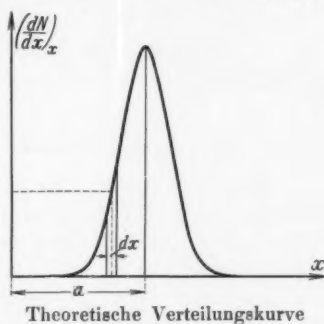


Fig. 3

Die Unbekannte a bestimmt sich zu:

$$(6) \quad a = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} y \cdot x.$$

III. Fehlerquellen bei der Messung von $\overline{\varphi^2}$

Die bei der Messung des mittleren Schwankungsquadrats auftretenden Fehlerquellen lassen sich in zwei Gruppen zusammenfassen:

- A. Vergrößerung von $\overline{\varphi^2}$ durch unregelmäßig erfolgende äußere Impulse (mechanische Erschütterungen).
- B. Auftreten neuer Direktionskräfte.

A. Mechanische Erschütterungen

Störungen dieser Art werden sich den Brownschen Schwankungen einfach überlagern, sie sind in einer Gausschen Verteilung darstellbar und verbreitern deshalb die Verteilungskurve.

Über den Einfluß mechanischer Erschütterungen geben die Aufnahmen von Schwankungskurven bei verschiedenen Drucken Aufschluß.

Im ganzen liegen zwei Gruppen von Aufnahmen vor; die eine Gruppe ist mit einem Faden von der Direktionskraft $2,66 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. gemacht (hierbei war die Direktionskraft nur auf etwa 4 Proz. genau bekannt); das Trägheitsmoment des Systems betrug $6,1 \cdot 10^{-6}$ abs. Einh. (vgl. Fig. 4).

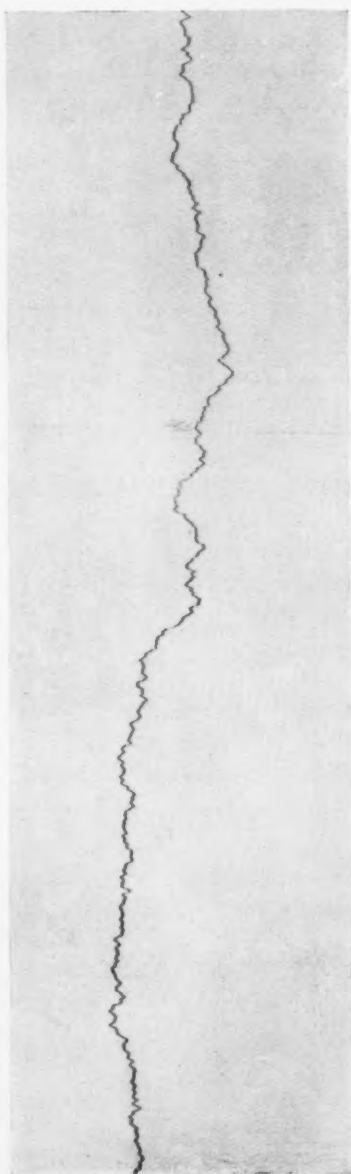
Die zweite Gruppe ist mit einem Faden von der Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. und mit einem System vom Trägheitsmoment von rund $1 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. ausgeführt. Mit diesem System liegen Aufnahmen vor bei Atmosphärendruck, bei 50 mm, 19 mm, $2 \cdot 10^{-2}$ mm, $1 \cdot 10^{-3}$ mm und bei $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg (vgl. Figg. 5 und 6).

Die Aufnahme bei $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg ging von 23 Uhr bis 8 Uhr. Die ersten 2 Stunden und die letzten 2 Stunden zeigt sie einen ganz starken Erschütterungseffekt (vgl. Fig. 6b). Auch beim Mittelstück (vgl. Fig. 6a) bestimmt sich $\overline{\varphi^2}$ um 16 Proz. zu groß. Bei den Aufnahmen bei $1 \cdot 10^{-3}$ mm Hg fehlen

die großen Schwankungen bereits ganz (vergleiche Fig. 5b), doch ist $\overline{\varphi^2}$ immer noch um 9 Proz. zu groß. Dasselbe gilt für die Aufnahme bei $2 \cdot 10^{-2}$ mm Hg. Stückweise liefern diese Aufnahmen schon mit denen bei hohen Drucken gemachten identische Werte für $\overline{\varphi^2}$.

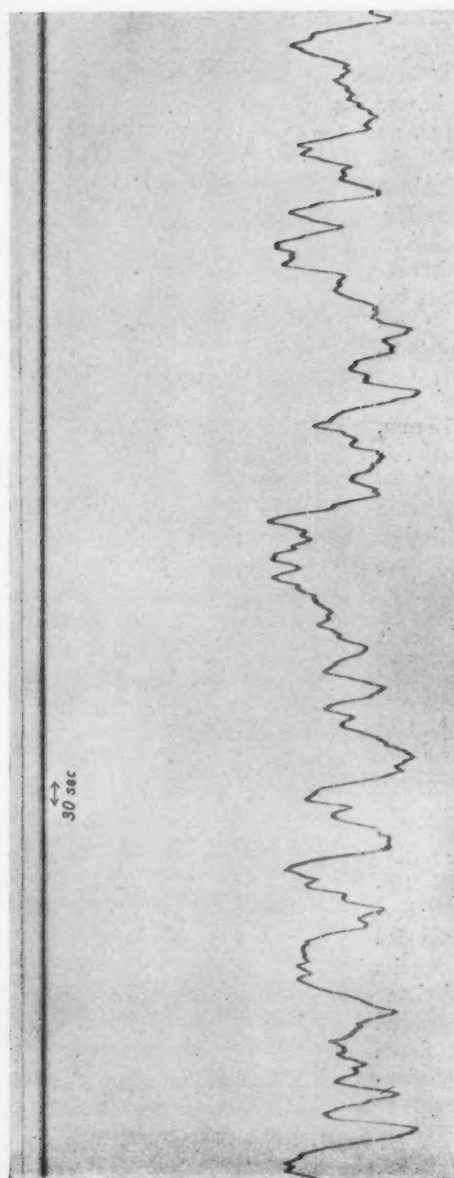
Die bei 19 mm, 50 mm Hg und Atmosphärendruck gemachten Aufnahmen liefern identische Werte für $\overline{\varphi^2}$ (Tabelle 4).

Es darf somit geschlossen werden, daß mechanische Erschütterungen erst unterhalb 1 mm Druck sich bemerkbar machen und dann um so mehr, je geringer die Dämpfung des Systems wird. Oberhalb 1 mm, wo das System sich bereits im aperiodischen Schwingungszustand befindet, ist deren Einfluß unbedeutend.



Registrierenaufnahme der Brownschen Bewegung (Methode B) (natürliche Größe).
 Direktionskraft $2,66 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $6,1 \cdot 10^{-6}$ abs. Einh. Skalenabstand: 86,5 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $d x = 2$ mm. a) Atmosphärendruck. Temperatur 15°C

Fig. 4a



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche GröÙe).
 Direktionskraft $2,66 \cdot 10^{-8}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $6,1 \cdot 10^{-8}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 86,5 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $dx = 2$ mm. b) $4 \cdot 10^{-8}$ mm Hg. Temperatur 10°C

Fig. 4 b



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).
 Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-2}$ abs. Einh. Trägheitsmoment: $1 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $dx = 1$ mm. a) Atmosphärendruck. Temperatur 13°C

Fig. 5a



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).
 Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-2}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $1 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $dx = 1$ mm. b) $1 \cdot 10^{-3}$ mm Hg. Temperatur 13°C

Fig. 5b



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).
 Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-6}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $1 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $d\alpha = 1$ mm. $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg. Temperatur 13°C . a) Mittelstück

Fig. 6a

B. Auftreten neuer Direktionskräfte

Das Auftreten neuer Direktionskräfte bewirkt zweierlei:

1. wird nach Gl. (1) $\bar{\varphi}^2$ kleiner,

2. aber wird im allgemeinen Falle das Hinzukommen einer neuen Direktionskraft eine Verlagerung des Nullpunktes nach sich ziehen; nur für den speziellen Fall, daß Nullpunkt des Systems, wenn die Zusatzdirektionskraft allein vorhanden wäre, mit dem Nullpunkt des Systems, der durch den Faden allein gegeben ist, übereinstimmen, ist dies nicht der Fall.

Der zweite Effekt ist störender und macht sich schon bei sehr kleinen Zusatzdirektionskräften bemerkbar. Eine Zusatzdirektionskraft von $\frac{1}{1000} D$ kann bereits eine Nullpunktverlagerung hervorrufen, die einige Prozent der Gesamtbreite der Verteilungskurve ausmacht.

Nullpunktverlagerungen haben Verbreiterungen der Verteilungskurve zur Folge; außerdem wird letztere im allgemeinen Falle, wenn die Verlagerungen zeitlich nicht kontinuierlich erfolgten, unsymmetrisch.

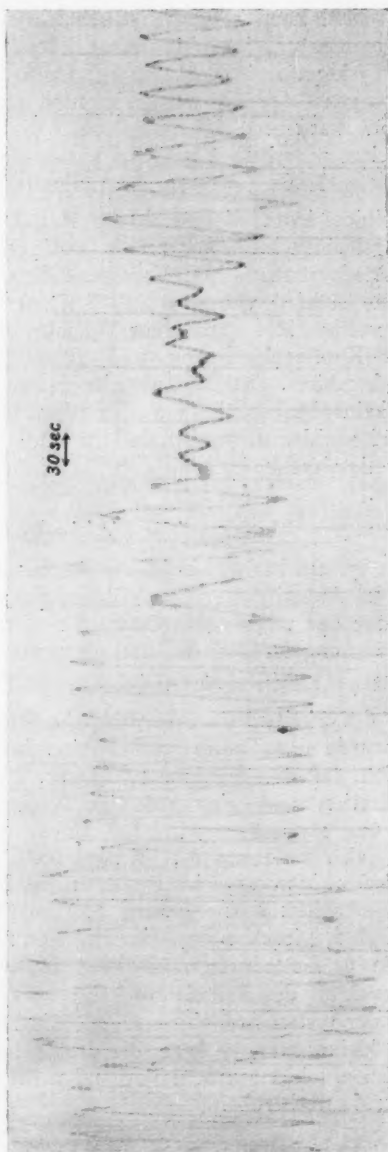
Ein strenges Kriterium dafür, ob die verschiedenen Werte von a , die sich nach Formel (6) für zwei verschiedene Schwingungskurven gleicher Beobachtungsdauer ergeben, bereits

auf eine Nullpunktsverlagerung hinweisen, oder ob sie wegen der beschränkten Beobachtungszeit sich noch so stark unterscheiden dürfen, steht mir bis jetzt noch nicht zur Verfügung.

Die zusätzlichen Direktionskräfte sind zweifacher Natur. Es handelt sich einerseits um Radiometerwirkungen, andererseits um eine magnetische Direktionskraft.

a) Radiometerwirkungen

entstehen vor allem durch zufällige Temperaturdifferenzen am Versuchsapparat. Nach Einpacken der Apparatur in Watte — das System ist in der etwa 2–3 mm weiten Bohrung eines zylinderförmigen Kupferblocks von 2 bis 3 cm Durchmesser aufge-



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).
Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $1 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.
Zeitmarke: 30 sec $dx = 1$ mm. $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg. Temperatur 13°C . b) Starke Erschütterung

Fig. 6b

hängt — und nach sorgfältigem Abdichten des Zimmers (die Zimmertemperatur schwankte während der Aufnahmen maximal um $0,5^{\circ}\text{C}$) konnte die Beobachtungsdauer, während der keine Verlagerungen festgestellt werden konnten, von 1 auf 14 Stunden ausgedehnt werden. Schließlich spricht die Beobachtung, daß bei Drucken unterhalb 1 mm Hg Verlagerungen häufiger und in stärkerem Maße auftreten, für radiometrische Störungen.

Zweitens kann die Strahlung des Registrierlichtzeigers am Spiegel einen Radiometereffekt bedingen. Hierüber liegen noch keine systematischen Untersuchungen vor. Als Lampe wurde eine Glühfadenlampe (6 Volt, 3 Watt) verwandt. Ultrarot und langwelliges Rot wurden zur Vorsicht mit einem Filter von wäßriger Kupfersulfatlösung und 10 cm Schichtdicke weitgehend absorbiert. Aus der Tatsache, daß nach Einschalten der Lampe keine beobachtbare Verlagerung der Drehwaage auftritt, darf geschlossen werden, daß ihr Einfluß gering ist, sicherlich so gering, daß er innerhalb der bis jetzt erreichten Genauigkeit liegt.

b) Magnetische Direktionskraft

Das System besitzt ein kleines magnetisches Moment. Bei der ersten Aufnahmengruppe (Direktionskraft $2,66 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh.) war das magnetische Erdfeld noch nicht kompensiert. Die Auswertung der Kurven liefert einen rund 30 Proz. kleineren Wert für $\overline{\varphi^2}$, als zu erwarten ist.

Bei der zweiten Gruppe (Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh.) wurde das Erdfeld auf 1 Proz. kompensiert; und es zeigte sich, daß dies durchaus nötig war. Nach Wegnahme der Kompensation trat eine sofortige Verlagerung des Lichtzeigers um etwa 5 cm ein, bei einem Skalenabstand von 72,1 cm, also rund um den Winkel 0,07. Da die Lage des magnetischen Momentes im System nicht bekannt ist, ist aus dieser Beobachtung eine genaue Angabe über die Größe der magnetischen Direktionskraft im Erdfelde nicht möglich; doch kann sie größenordnungsmäßig auf etwa 10 Proz. von der Direktionskraft des Fadens geschätzt werden. Beachtet man, daß bei der ersten Aufnahmengruppe die Direktionskraft rund $3\frac{1}{2}$ mal kleiner war, so kann die dort gefundene Abweichung von 30 Proz. leicht auf dem Vorhandensein einer magnetischen Direktionskraft beruhen.

IV. Absolutmessung

Die erste Gruppe von Aufnahmen, an der die Fehlerquellen zuerst studiert wurden, zeigte, daß es vorerst noch keinen Sinn hat, allzu dünne Fäden zu verwenden, um möglichst große Schwankungen zu erzeugen.¹⁾ Es wurde deshalb bei unserer Absolutmessung ein dickerer Faden gewählt, dessen Direktionskraft mit zwei verschiedenen Zusatzmassen gemessen wurde. Tab. 3 enthält die Ergebnisse.

Tabelle 3

Stäbchen	Länge cm	Radius cm	Masse g	I $\text{g} \cdot \text{cm}^2$	T sec	D $\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$
1	1,074	0,0113	$4,735 \cdot 10^{-3}$	$4,552 \cdot 10^{-4}$	1379	$9,443 \cdot 10^{-9}$
2	2,4397	0,016	$3,667 \cdot 10^{-3}$	$1,819 \cdot 10^{-3}$	2762	$9,415 \cdot 10^{-9}$

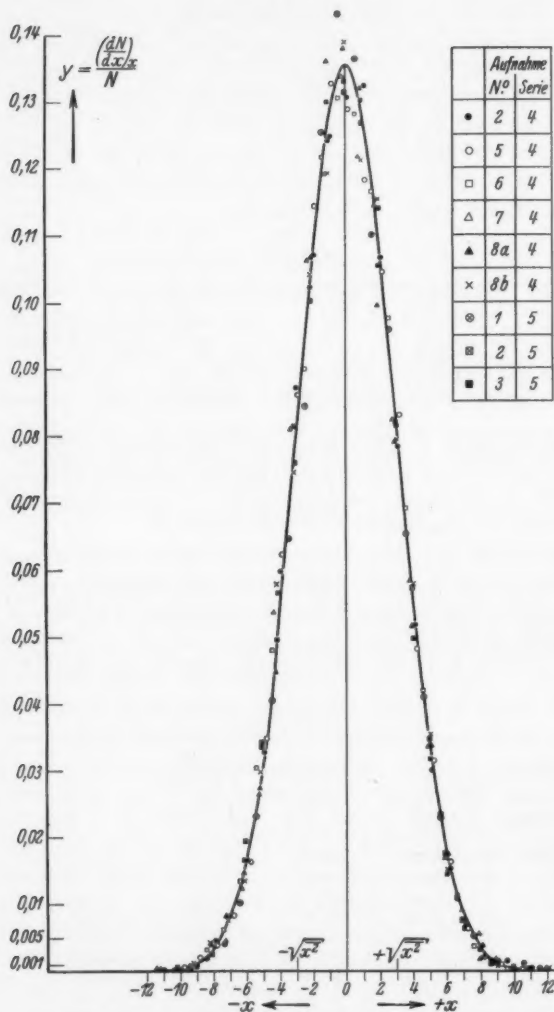
Mittelwerte für D : $9,428 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh.; der mittlere Fehler $\pm 0,2$ Proz. liefert angesichts der Tatsache, daß nur zwei Messungen vorliegen, wahrscheinlich eine zu günstige Beurteilung des Resultats.

Fig. 7 enthält die Werte y (Gleichung 4) aus neun Aufnahmen von je $7-13\frac{1}{2}$ Stunden Beobachtungszeit. Die aus-gezogene Kurve stellt die daraus gemittelte Verteilungskurve dar. Tab. 4 enthält die zahlenmäßige Auswertung der einzelnen Kurven; Tab. 5 die Mittelwerte aus allen Kurven.

Tabelle 4

Aufnahme		Druck	Temperatur abs.	Beob- achtungs- dauer in Stdn.	\bar{q}^2	N_L 10^{22}
Nr.	Serie					
2	4	Atm. Druck	285,9°	12	$4,183 \cdot 10^{-6}$	60,26
5	4	Atm. Druck	286,5°	11,5	$4,147 \cdot 10^{-6}$	60,92
6	4	Atm. Druck	286,7°	9	$4,245 \cdot 10^{-6}$	59,55
7	4	Atm. Druck	287,8°	13,5	$4,229 \cdot 10^{-6}$	60,00
8a	4	Atm. Druck	287,8°	10,5	$4,184 \cdot 10^{-6}$	60,62
8b	4	Atm. Druck	287,8°	7	$4,156 \cdot 10^{-6}$	61,06
1	5	19 mm Hg	286,9°	13	$4,047 \cdot 10^{-6}$	62,56
2	5	19 mm Hg	287,0°	11	$4,236 \cdot 10^{-6}$	59,74
3	5	50 mm Hg	287,6°	13,5	$4,197 \cdot 10^{-6}$	60,42

1) Bei den eingangs genannten Versuchen von W. Gerlach gelang es, so dünne Fäden herzustellen, daß die Brownsche Bewegung bei einem Meter Skalenabstand Schwankungen von mehr als einem Meter lieferte.



Experimentelle Verteilungskurve aus 9 Schwankungsaufnahmen
von durchschnittlich je 11-stündiger Beobachtungsdauer

Fig. 7

Tabelle 5

Temperatur abs.	Gesamte Beobachtungs- Dauer in Stdn.	$\bar{\varphi}^2$	N_L
287,1°	101	$4,178 \cdot 10^{-6}$	$60,59 \cdot 10^{22}$

Der mittlere Fehler für $\bar{\varphi}^2$ einer einzelnen Kurve von der durchschnittlichen Beobachtungsdauer von 11 Stunden errechnet sich zu $\pm 1,4$ Proz.; derjenige des Mittelwerts zu $\pm 0,4$ Proz.

Der Mittelwert von N_L ist damit mit einem mittleren Fehler von $\pm 0,6$ Proz. behaftet. Angesichts der Tatsache, daß nur neun Beobachtungskurven vorliegen, ist das Ergebnis mit einem mittleren Fehler von $\pm 0,4$ Proz. für $\bar{\varphi}^2$ wahrscheinlich zu günstig beurteilt. *Immerhin dürfte die Bestimmung der Loschmidtschen Zahl mit dieser Methode auf ± 1 Proz. erreicht sein.*

V. Verbesserungen

Die hier mitgeteilten Untersuchungen berechtigen zu der Hoffnung, daß mit weiterer Vervollkommnung der Apparatur die Fehlergrenze noch wesentlich herabgesetzt werden kann. Die Direktionskraft des Quarzfadens soll mit exakt homogenen Stäbchen, eventuell aus Quarz, noch genauer und sicherer gemessen werden.

Durch Verwendung eines Trägheitsthermostaten und durch weitgehende Abschirmung des magnetischen Erdfeldes, dessen Schwankungen jetzt noch störend sind, wird sich die Beobachtungsdauer, während der keine Verlagerungen stattfinden, sicherlich noch wesentlich steigern lassen. Andererseits wird angestrebt werden, die Apparatur so zu verbessern, daß störungsfreie Aufnahmen auch bei niedersten Drucken durchführbar sind. Wie aus den Figg. 4—6 hervorgeht, reicht bei niederen Drucken schon eine wesentlich kürzere Beobachtungszeit aus, als bei hohen Drucken, um eine sichere Verteilungskurve zu erhalten. Es würden nach unserer Schätzung fortlaufende Registrierkurven von 2—3 Tagen Dauer bereits genügen, um daraus $\bar{\varphi}^2$ mit maximalen Schwankungen von

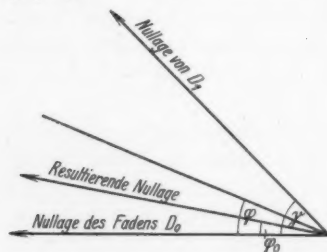
wenigen Promille entnehmen zu können, während dazu bei höheren Drucken eine Beobachtungsdauer von einigen Wochen nötig wäre.

VI. Anhang

Zur Messung der Direktionskraft D eines Torsionsfadens durch Variation von D kann man an eine elektrostatische oder an eine magnetische Methode denken. Man könnte auch die Gravitationskraft benützen, wobei man auch Ablenkungsversuche machen könnte. Denn die zur Beobachtung der Brownschen Bewegung notwendigen Direktionskräfte sind so klein, daß mit verhältnismäßig kleinen Massen leicht Ablenkungswinkel von $20-30^\circ$ erreicht werden.

Es wurde die magnetische Methode probiert, indem man an das System einen kleinen Magneten mit bekanntem magnetischen Moment hing, den man in verschiedenen bekannten Feldern schwingen ließ. Soweit die hierbei gemachten Beobachtungen von allgemeinem Interesse zu sein scheinen, sollen sie im folgenden kurz mitgeteilt werden.

Es sei hier eine allgemeinere Betrachtung eingeschoben über die Schwingung eines Systems, das zwei verschiedenen Direktionskräften unterworfen ist, wobei die Nullage des Systems eine andere ist, je nachdem nur die eine oder nur die andere Direktionskraft vorhanden ist. Die eine Direktionskraft sei die des Quarzfadens, dessen Torsionsmoment proportional dem Ausschlag φ ist; die andere sei eine solche, deren Drehmoment proportional $\sin \gamma$ ist. Wir beziehen die Gleichungen zunächst auf die Nullage, die das System einnimmt, wenn nur die Direktionskraft des Quarzfadens vorhanden ist, und führen folgende Bezeichnungen ein (Fig. 8):



D_0 Direktionskraft des Quarzfadens,

D_1 die andere Direktionskraft (im magnetischen Falle mH),

γ der Winkel, den die beiden Nullagen miteinander bilden,

φ_0 der Winkel der resultierenden Nullage.

Fig. 8

Diese ist gegeben durch:

$$D_0 \varphi_0 = D_1 \sin(\gamma - \varphi_0).$$

Beim Ausschlag φ ist das Drehmoment:

$$D_0 \varphi - D_1 \sin(\gamma - \varphi).$$

Die Schwingungsgleichung des Systems bei ungedämpfter Schwingung ist:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D_0}{I} \varphi - \frac{D_1}{I} \sin(\gamma - \varphi) = 0.$$

Transformieren wir auf die resultierende Nullage und setzen:

$$\varphi = \chi + \varphi_0 ; \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\chi} .$$

Dann folgt:

$$\ddot{\chi} + \frac{D_0}{I} (\chi + \varphi_0) - \frac{D_1}{I} \sin \{(\gamma - \varphi_0) - \chi\} = 0 .$$

Für kleine Ausschläge χ gilt:

$$\begin{aligned} \sin \{(\gamma - \varphi_0) - \chi\} &= \sin (\gamma - \varphi_0) - \chi \sqrt{1 - \sin^2 (\gamma - \varphi_0)} \\ &= \frac{D_0}{D_1} \varphi_0 - \chi \sqrt{1 - \frac{D_0^2}{D_1^2} \varphi_0^2} , \end{aligned}$$

d. h. es ist

$$\ddot{\chi} + \frac{D_0}{I} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{D_1^2}{D_0^2} - \varphi_0^2} \right\} \chi = 0 .$$

Die Schwingungsdauer ergibt sich zu:

$$T'^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D_0 \left(1 + \sqrt{\frac{D_1^2}{D_0^2} - \varphi_0^2} \right)} .$$

Für $\varphi_0 = 0$, d. h. $\gamma = 0$ folgt:

$$T'^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D_0 + D_1} .$$

Die Schwingungsdauer ist also geändert, wenn die beiden Direktionskräfte verschiedene Nullpunkte haben. Um einfache Verhältnisse zu erhalten, ist es daher nötig, $\gamma = 0$ zu machen.

Im magnetischen Falle ist

$$D_1 = mH ,$$

wo m das magnetische Moment des Magneten, H die Intensität des Feldes bedeuten. Wir messen die Schwingungsdauer beim Felde H_1 und H_2 . Für $\gamma = 0$ folgt dann:

$$D_0 = m \frac{H_2 T_2^2 - H_1 T_1^2}{T_1^2 - T_2^2} .$$

Um aus diesem Ausdruck D_0 mit befriedigender Genauigkeit entnehmen zu können, muß, wie aus einer Fehlerbetrachtung von Differenzen folgt, mH in der Größenordnung von D_0 liegen. Hier bietet nun das magnetische Erdfeld eine prinzipielle Schwierigkeit. Die kleinsten magnetischen Momente, die hergestellt und gemessen werden konnten, gestatteten höchstens so große Felder zu wählen, die in der Größenordnung des Erdfeldes liegen, um ein genügend kleines mH zu erhalten. Man muß daher entweder das Erdfeld H_0 sehr genau messen, oder möglichst vollständig kompensieren. Wir kompensierten mit einem Kreisstrom das Erdfeld bis auf ein Restfeld H^* . Man erhält also aus zwei Schwingungsbeobachtungen in den Feldern $(H_1 + H^*)$ und $(H_2 + H^*)$

$$(7) \quad D_0 + mH^* = m \frac{H_2 T_2^2 - H_1 T_1^2}{T_1^2 - T_2^2} .$$

mH^* muß also $\ll D_0$ sein.

Die kleinsten Magnete, die hergestellt wurden, waren etwa 0,3 mm lang, 0,1 mm breit und 0,02 mm dick, ihr magnetisches Moment m betrug etwa $2 \cdot 10^{-5}$ abs. Einh., also $mH_0 = 4 \cdot 10^{-6}$ abs. Einh. Kompensiert man H_0 auf 1 Promille, so wird $mH^* = 4 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. Es ist also möglich, mit einem solchen Magneten eine Direktionskraft $D_0 = 4 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. auf 1 Proz. genau zu messen. Das mittlere Schwankungsquadrat eines solchen Systems wäre für $T = 300^\circ$ abs.

$$\overline{q^2} = 1,03 \cdot 10^{-7}.$$

Bei 1 m Skalenabstand gibt dies:

$$\sqrt{\overline{x^2}} = 6,42 \cdot 10^{-2} \text{ cm},$$

also immerhin noch gut beobachtbare, aber wenig genau meßbare Schwankungen.

Messung von m

m wurde folgendermaßen gemessen:

Nach der Gauss'schen Methode wurde in der 1. Hauptlage mH_0 bestimmt. Der Ausschlag des Magnetometers (als Magnetnadel diente ein Magnet von denselben Dimensionen wie der zu messende, um mit möglichst kleinen Abständen arbeiten zu können) wurde mit einer kleinen Normal-spule von bekanntem magnetischen Moment (Länge 0,6412 cm) kompensiert, um H_0 zu eliminieren. Die Vorversuche waren befriedigend genau; Tab. 6 enthält eine Meßreihe für m .

Tabelle 6

Abstand: Spule—Magnetometer in cm	Abstand: Magnet—Magnetometer in cm	m
5,994	0,3046	6,29
	0,3139	6,34
	0,3683	6,34
	0,4320	6,28
		$\left. \begin{array}{l} 6,29 \\ 6,34 \\ 6,34 \\ 6,28 \end{array} \right\} \cdot 10^{-5} \text{ abs. Einh.}$

Die Felder H_1 und H_2 wurden mit Hilfe einer Normalspule von rund 26 cm Länge, 3,5 cm Durchmesser, 375 Windungen erzeugt und aus den Dimensionen der Spule und der Stromstärke berechnet.

Der Magnet befand sich in der Mittelebene der Spule, ungefähr 6–7 cm von der Längsachse der Spule entfernt.

Nun schwankt aber im hiesigen Institut das Erdfeld selbst bei Nacht beträchtlich, bei Nacht um etliche Promille, bei Tag sogar um einige Prozent, so daß diese Methode die oben angegebene Genauigkeit nicht leisten kann. Von dem Wunsche geleitet, vor allem auch noch kleinere Direktionskräfte messen zu können, gingen wir, um das magnetische Moment des Systems noch mehr zu verkleinern, zu einem astatischen System aus zwei Magneten von der erwähnten Größenordnung über. Das Erdfeld wurde kompensiert.

Es sei gleich auf einen Nachteil dieser Methode hingewiesen, der darin besteht, daß nunmehr das magnetische Moment des Systems, das

sich im wesentlichen aus der algebraischen Differenz (genauer der geometrischen Differenz) der magnetischen Momente der einzelnen Magnete zusammensetzt, nicht mehr genau meßbar ist.

Bei den Versuchen mit astatischen Systemen wurden nun zwei merkwürdige Beobachtungen gemacht, die uns veranlaßten, etwas eingehender das Verhalten astatischer Systeme zu studieren.

Die Versuchsanordnung war folgende (vgl. Fig. 9):

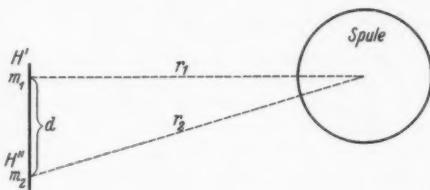


Fig. 9

Das System befand sich in der Mittelebene der Spule so, daß der Magnet m_1 mit der Spule in gleicher Höhe war und die Entfernung r_1 (6 bis 7 cm) hatte; r_2 kann dann aus r_1 und dem Abstand d der beiden Magnete berechnet werden.

Die erste Beobachtung war folgende: Einerseits nahm das astatische System im Erdfeld eine Stellung ein, die mit der Stellung des Systems mit nur einem Magneten einen ziemlich großen Winkel bildete. Stand andererseits die Spule mit ihrer Längsachse parallel dem Erdfeld, so drehte sich das System mit wachsender Stromstärke bis zu einem bestimmten Grenzwinkel, der ebenfalls ziemlich groß war, aus der Nullage heraus. Umgekehrt mußte man, um bei einer bestimmten Stromstärke keinen Ausschlag zu erhalten, die Spule um einen bestimmten Winkel gegen das Erdfeld drehen.

Die zweite Erscheinung war, daß bei kompensiertem Erdfeld keine Stellung der Spule gefunden werden konnte, bei der das System bei jeder Stromstärke in Ruhe blieb.

Und zwar war die Abhängigkeit der Lage des Systems von der Stromstärke eine solche, daß das System mit wachsender Stromstärke sich zuerst nach der einen Seite drehte, bei einer bestimmten Stromstärke wieder umkehrte, wieder durch die Nullage ging, um dann nach der anderen Seite zu wandern bis zu einem bestimmten Grenzwinkel (vgl. Fig. 10).

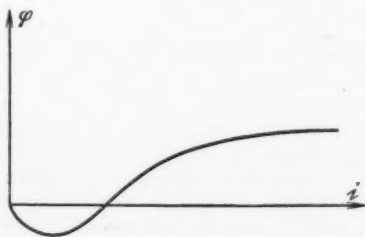


Fig. 10

Die erste Erscheinung zeigt das ganz normale Verhalten eines astatischen Systems, das dem Idealfall völliger Astatie nur mit bestimmter Grenze nahekommt. Die Fehler eines astatischen Systems bestehen erstens in der Tatsache $m_1 \neq m_2$, zweitens in dem Umstand, daß die Momente einen kleinen Winkel δ miteinander bilden; letztere Tatsache ist besonders von Bedeutung.

Wir berechnen zuerst die Gleichgewichtslage eines solchen Systems bei ausgeschaltetem Erdfeld und bei Vernachlässigung der Aufhängung unter Wirkung der beiden parallelen Felder H' und H'' unserer Spule (vgl. Fig. 11).

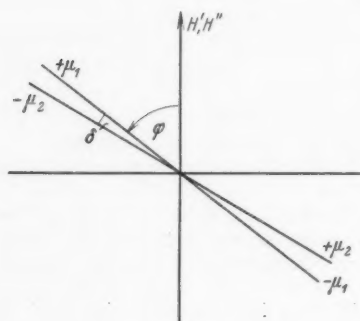


Fig. 11

Der Winkel φ ist der Winkel, den m_1 mit der Feldrichtung H' bzw. H'' bildet.

Auf m_1 wirkt das Drehmoment: $D_1 = m_1 H' \sin \varphi$, auf m_2 : $D_2 = m_2 H'' \sin (180^\circ + \varphi + \delta)$. Gleichgewicht herrscht für $D_1 + D_2 = 0$. Daraus folgt für die Gleichgewichtslage φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 H'' \sin \delta}{m_1 H' - m_2 H'' \cos \delta}.$$

Setzen wir $\frac{m_2}{m_1} = a$,

$\frac{H''}{H'} = b$, so folgt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \cdot b \cdot \sin \delta}{1 - a \cdot b \cdot \cos \delta}.$$

Im Falle eines homogenen Feldes ($b = 1$) und völlig gleicher Magnete ($a = 1$) folgt:

$$\varphi = 90^\circ - \frac{\delta}{2},$$

d. h. das System stellt sich senkrecht zum homogenen Felde ein.

Für bestimmte Werte von a , b und δ kann jeder Winkel zwischen 0 und 90° vorkommen.

Hat man nun dafür Sorge getragen, daß Nullage des Fadens und Nullage des Erdfeldes und Nullage des nach Kompensation des Erdfeldes noch vorhandenen Restfeldes übereinstimmt, so bleibt die zweite Erscheinung unverstänlich.

Sind die eben erwähnten Bedingungen nicht erfüllt, so folgt, wie man durch eine ähnliche Rechnung zeigen kann, zwar eine Abhängigkeit der Gleichgewichtslage φ von der Stromstärke i , aber nur eine von folgender Art:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a' i + b'}{a'' i + b''},$$

d. h. $\operatorname{tg} \varphi$ ist eine monotone Funktion von i .

Die zweite Erscheinung findet ihre Erklärung durch die Annahme, daß die beiden Magnete des Systems durch die Felder H' und H'' verschieden magnetisiert werden.

Durch den Ansatz

$$m_1 = m_{10} (1 + c_1 i)$$

$$m_2 = m_{20} (1 + c_2 i)$$

erhält man für $\operatorname{tg} \varphi$ eine Funktion von folgender Form:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a' i^2 + b' i + c'}{a'' i^2 + b'' i + c''},$$

die eine Abhängigkeit, wie sie in Fig. 10 gezeichnet ist, liefern kann.

Für diese Erklärung spricht auch noch folgende Beobachtung, die bei sehr empfindlicher Aufhängung gemacht wurde, wo selbst nach Kompensation des Erdfeldes die Direktionskraft des Restfeldes mit der des Fadens noch vergleichbar war: Hat man die Spule so gedreht, daß bei bestimmter Stromstärke das System in der Nullage verblieb und schaltete man dann aus, so drehte sich das System aus der Nullage heraus, um nach einiger Zeit wieder zurückzukehren. Durch die Felder H' , H'' haben sich die Konstanten des Systems geändert, und zwar kann sich nur die Konstante a geändert haben.

Alle diese Beobachtungen wurden bei empfindlicher Aufhängung gemacht, wo mH (m ist hier das resultierende Moment des astatischen Systems) für eine Messung von D noch zu groß war. Stehen mH und D in geeignetem Verhältnis zueinander, so treten diese Beobachtungen in geringerem Maße in Erscheinung. Die Änderung des Gesamtmomentes durch verschiedene Magnetisierung bleibt aber natürlich bestehen. Die Werte, die für D_0 aus der Gleichung:

$$D_0 + mH^* = C \cdot \frac{i_2 T_2^2 - i_1 T_1^2}{T_1^2 - T_2^2}$$

folgten, streuten bis zu 12 Proz.

Es ist auch nach sonstigen Angaben über die Größe der Magnetisierungskonstanten c eine Änderung des Gesamtmomentes bei den von uns benützten Feldern bis zu 10 Proz. durchaus wahrscheinlich gemacht.

Die Tatsache, daß das Moment des astatischen Systems durch verschiedene Magnetisierung der einzelnen Magnete sich sehr stark ändert, macht diese Methode unbrauchbar.

Ein Vergleich der Gl. (3) und (7) läßt einen grundsätzlichen Vorzug der Gauss'schen Methode vor der eben besprochenen erkennen. Während in Gl. (7) immer entweder das Feld H oder die dazugehörige Schwingungsdauer T genau bekannt sein müssen, darf in Gl. (3) sowohl I_n als auch T_n mit einem größeren Fehler behaftet sein. In Gl. (7) wird das kleinere Feld H_1 dadurch ungenau, daß die Schwankungen des Restfeldes sich schon bemerkbar machen, wodurch natürlich auch die Schwingungsdauer T_1 ungenau wird. In Gl. (3) wirken sich die Fehler, die durch unsymmetrisches Ankitten entstehen, am meisten bei den kleinen Trägheitsmomenten aus; das schadet aber nichts, da die ihnen zugeordnete Schwingungsdauer auch nicht so genau bekannt zu sein braucht.

Ferner ist die Beobachtung, daß die exakte Messung der Schwingungsdauer bei kleinen Amplituden sehr großen Schwierigkeiten begegnet, ein weiterer Grund, warum jede Methode von der Art, wie die im Anhang behandelte, zur Messung kleiner Direktionskräfte versagen muß.

Zusammenfassung

Aus der Brownschen Bewegung einer Drehwaage wird eine Messung der Loschmidtschen Zahl N_L durchgeführt. N_L bestimmt sich aus 9 Schwankungsaufnahmen von insgesamt 101 Stunden Beobachtungsdauer zu $60,59 \cdot 10^{22} \pm 1$ Proz.

Zur Messung der Direktionskraft des Quarzfadens (Größenordnung 10^{-9} abs. Einh.) wurde die Gauss'sche Methode mit Erfolg angewandt. Eine magnetische Methode, bei der bei gleichem Trägheitsmoment die Direktionskraft variiert wurde, führte nicht zum Ziel.

Erschütterungen machen sich erst unterhalb 1 mm Druck bemerkbar. Die Hauptfehlerquelle besteht im Auftreten variabler Zusatzdirektionskräfte (Radiometerwirkungen, magnetische Direktionskraft); die Versuche berechtigen zur Hoffnung, daß deren Einfluß noch wesentlich vermindert werden kann.

Hrn. Professor Dr. W. Gerlach bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes, förderndes Interesse zu tiefstem Dank verpflichtet. Hrn. Professor Rüchardt danke ich für sein großes Interesse während des Verlaufes der Untersuchungen. Besonderer Dank gebührt Hrn. Privatdozent Dr. Schütz, dem ich viele wertvolle Besprechungen und Ratschläge verdanke. Von den gebrauchten Hilfsmitteln stammt die Edelmannsche Registriervorrichtung, die Hochvakuumpumpe, sowie das photographische Material von der Helmholtz-Gesellschaft, wofür auch an dieser Stelle bestens gedankt sei.

München, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 27. Juni 1931)

8.
gs.
in
ng

rd
rt.
nt

n-
nit
bei
le,

ek
en
ne-
ng,
.

ng
em
für
en.
em
ke.
che
oto-
uch